Université Paris-Dauphine **2008-2009**
M2R EDPMAD - S. Mischler

Mardi 26 Mai, 14h - 16h
Tous les documents sont autorisés

Problème 1: Chaos.
On considère la mesure $ds_N(x) = s_N(dx)$ uniforme sur la sphère de rayon $\sqrt{N}$ de $\mathbb{R}^N$ et la mesure gaussienne $\gamma(dx) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-x^2/2}$. L'objectif du problème est de montrer que s_N est γ-chaotique.

a) - Montrer que $(X_1^2 + ... + X_N^2)/N \to 1$ en loi, si les $(X_i)_{1\le i\le N}$ sont des variables aléatoires indépendantes et de même loi γ.

b) - On définit $\mu_N(dr)$ la loi du rayon sous $\gamma^{\otimes N}$ et $s_{N,r}$ la mesure uniforme sur la sphère $S^{N-1}(r)$ de rayon r de $\mathbb{R}^N$, ce qui signifie simplement que pour toute fonction $\varphi \in C(\mathbb{R}^N)$ on a

$$(1) \qquad \int_{\mathbb{R}^N} \varphi(x)\, \gamma^{\otimes N}(dx) = \int_0^\infty \left\{ \int_{S^{N-1}(r)} \varphi(x)\, s_{N,r}(dx) \right\} \mu_N(dr).$$

Montrer que pour tout $0 < a < 1 < b < \infty$, on a

$$(2) \qquad \lim_{N\to\infty} \int_{\mathbb{R}\backslash[a\sqrt{N},b\sqrt{N}]} \left\{ \int_{S^{N-1}(r)} s_{N,r}(dx) \right\} \mu_N(dr) = 0$$

et

$$(3) \qquad \lim_{N\to\infty} \mu_N([a\sqrt{N}, b\sqrt{N}]) = 1.$$

c) - D'autre part, montrer que

$$\int_0^\infty \left\{ \int_{S^{N-1}(r)} \varphi(x)\, s_{N,r}(dx) \right\} \mu_N(dr) = \int_0^\infty \left\{ \int_{S^{N-1}(r)} \varphi\big(x\, \frac{r}{\sqrt{N}}\big)\, s_N(dx) \right\} \mu_N(dr).$$

En déduire que pour toute fonction $f \in C_c(\mathbb{R}^k)$ fixée, et en notant $f^N := f \otimes 1^{\otimes(N-k)}$ pour $N \ge k$, on a

$$(4) \qquad \lim_{a\to 1^-, b\to 1^+} \sup_{N\ge k} \left| \int_{a\sqrt{N}}^{b\sqrt{N}} \left\{ \int_{S^{N-1}(r)} f^N\, ds_{N,r} \right\} \mu_N(dr) - \mu_N([a\sqrt{N}, b\sqrt{N}])\, \langle s_N, f^N\rangle \right| = 0.$$

d) - Conclure en combinant (1), (2), (3) et (4).

Problème 2: McKean-Vlasov.

On rappelle que pour $s > 1/2$ on a injection continue $H^s(\mathbb{R}) \subset C_0(\mathbb{R})$ avec donc $\|f\|_\infty \le C\,\|f\|_{H^s}$ pour tout $f \in H^s(\mathbb{R})$.

1) - Montrer que l'application $\mathbb{R}^N \to H^{-3}(\mathbb{R})$, $X \mapsto \hat\mu_X^N$ est de classe C^2 et calculer $\partial_i(\hat\mu_X^N)$ et $\partial^2_{ij}(\hat\mu_X^N)$.

2) - Soit $\Phi \in C^{2,1}(H^{-3};\mathbb{R})$, i.e. $\Phi \in C^2(H^{-3};\mathbb{R})$ telle qu'il existe une constante C telle que

$$\left|\Phi(v) - \Phi(u) - D\Phi(u)(v-u) - \frac{1}{2}D^2\Phi(u)(v-u)^{\otimes 2}\right| \le C\,\|v-u\|^3_{H^3}.$$

Calculer $\partial_i\Phi(\hat\mu_X^N)$ et $\partial^2_{ij}\Phi(\hat\mu_X^N)$

3) - Pour $\phi \in C^2(\mathbb{R}^N)$ on définit

$$G^N\phi(X) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^N \partial^2_{ii}\phi - \sum_{i=1}^N F(x_i,\hat\mu_X^N)\partial_i\phi,$$

avec

$$F(x,m) := \int_{\mathbb{R}} b(x-y)\,m(dy).$$

Pour $\mu \in P(\mathbb{R})$, on définit également (au sens faible)

$$Q(\mu) := \frac{1}{2}\mu'' + (F(x,\mu)\,\mu)'.$$

Montrer que pour tout $\Phi \in C^{2,1}(H^{-3}(\mathbb{R}))$, on a

$$G^N\Phi(\hat\mu_X^N) = \langle Q(\hat\mu_X^N), D\Phi(\hat\mu_X^N)\rangle + \mathcal{O}\big(\frac{1}{N}\big).$$