# 1 Sujet : Distance et quantification du chaos

Le but de ce problème est de démontrer les théorèmes 1.1 et 1.2 qui suivent.

## 1.1 Premier taux de convergence vers le chaos

**Théorème 1.1** *Il existe une distance $D$ sur $P(P(Q))$ (que nous allons la construire dans la preuve) telle que*

$$\forall\, \rho \in P(Q) \qquad D(\delta_\rho, \hat\rho^N) \le 1/N^{1/2}.$$

*Indication pour la preuve du théorème 1.1.*

• Pour $\varphi \in C(Q)$ fixée, montrer que

$$E_N \left( \int \varphi \, d(\hat\mu^N_X - \rho) \right)^2 = \frac{1}{N} \left\{ \int_Q (\varphi^2 - \bar\varphi)^2 \right\}.$$

• Pour $\Phi = R_\varphi \in \mathbb{M}(P(Q))$, $\varphi = \varphi_1 \otimes \ldots \otimes \varphi_k$, $\varphi_j \in C(Q)$, et en notant $M = \max \|\varphi_j\|$, montrer que

$$E_N \left| \Phi(\mu^N_X) - \Phi(\rho) \right| \ \le \ k \, \frac{M^k}{N^{1/2}}$$

• On considère une suite $\Phi_k$ de $\mathbb{M}(P(Q))$ de degré $k$ dense dans $C(P(Q))$. En notant $\Phi_k = R_{\varphi_k}$, $\varphi_k = \varphi_{k,1} \otimes \ldots \otimes \varphi_{k,k}$, $\varphi_{k,j} \in C(Q)$, $M_k = \max_j (\|\varphi_{k,j}\| \vee 1)$ on définit

$$\forall\, \hat\pi_1, \ \hat\pi_2 \in P(P(Q)) \qquad D(\hat\pi_1, \hat\pi_2) := \sum_{k \ge 1} \frac{1}{k\, M_k^k \, 2^k} \, |\langle \hat\pi_2 - \hat\pi_1, \Phi_k \rangle|.$$

Montrer que $D$ ainsi défini possède bien les propriétés énoncées. $\square$

### 1.1.1 Taux de convergence vers le chaos en distance $\mathcal{W}_2$

Comme dans $P(Q)$ on peut définir des distances par le procédé de Monge-Kantorovich sur $P(P(Q))$ une fois fixée une distance $d$ sur $P(Q)$ en posant pour tout $m_i \in P(P(Q))$

$$\mathcal{W}_p(m_1, m_2) := \inf_{\pi \in \Pi} \left( \int_{P(Q) \times P(Q)} d(\rho_1, \rho_2)^p \, \pi(d\rho_1, d\rho_2) \right)^{1/p}$$

où $\Pi$ est l'ensemble des mesures de probabilité sur $P(Q)^2$ de ième marginale $m_i$. Si $m_1$ est "déterministe" : $m_1(\rho) = \delta_\mu$ et $m_2 = m$ alors $\Pi = \{(\delta_\mu, m)\}$ de sorte que

$$\mathcal{W}_p^p(\delta_\mu, m) = \int_{P(Q) \times P(Q)} d(\rho_1, \rho_2)^p \, \delta_\mu(d\rho_1) \, m(d\rho_2) = \int_{P(Q)} d(\rho, \mu)^p \, m(d\rho).$$

Enfin, pour $m = \hat\mu^N$ la mesure empirique associée à $\mu$ et en notant $\hat\mu^N_X$ la mesure empirique associée à $X \in Q^N$ on a

$$\mathcal{W}_p^p(\delta_\mu, \hat\mu^N) = \int_{P(Q)} d(\rho,\mu)^p \, \hat\mu^N(d\rho) = \int_{Q^N} d(\mu, \hat\mu^N_X)^p \mu^{\otimes N}(dX) =: \mathbf{E}_N(d(\mu, \hat\mu^N_X)^p).$$

Sans autre précision, la distance $d$ choisie pour définir $\mathcal{W}_p$ sur $P(P(Q))$ est $d = w_p$ avec $w_p$ désignant la distance de Monge-Kantorovich dans $P(Q)$ (elle-même notée habituellement $\mathcal{W}_p$ !).

**Théorème 1.2** *Soit $\mu \in P(\mathbb{R}^d)$ telle que $\langle \mu, |x|^{d+5}\rangle =: c < \infty$. Alors il existe $C = C(c,d)$ telle que*

$$\mathcal{W}_2(\hat\mu^N, \delta_\mu) \le C\, N^{-1/(d+4)}$$

*où $\hat\mu^N$ désigne la mesure empirique associée à $\mu^{\otimes N}$.*

**Lemme 1.3** *Il existe une constante $C_d$ telle que pour toute fonction $0 \le g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ on a*

$$\int_{\mathbb{R}^d} g(x)\, dx \le C_d \sqrt{\int (1 + |x|^{d+1})\, g^2(x)\, dx}. \tag{1.1}$$

**Lemme 1.4 (density coupling lemma).** *Pour toutes fonctions $0 \le f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ de masse 1 on a*

$$w_2(f\,dx, g\,dx) \le \sqrt{3\, \|(f-g)\,|x|^2\|_{L^1}}.$$

*Indication pour la preuve du Lemme 1.4.* On note $\mu = f\,dx$, $\nu = g\,dx$. Soit $\pi$ le couplage de $\mu$ et $\nu$ défini par la relation : pour toute fonction $\varphi \in L^0_+(\mathbb{R}^d)$

$$\begin{aligned}\int \varphi\, d\pi \;&=\; \frac{1}{1-A} \iint \varphi(x,y)\,(f(x) - (f\wedge g)(x))(g(y) - (f\wedge g)(y))\, dxdy \\ &\quad + \int \varphi(x,x)(f\wedge g)(x)\, dx, \qquad A := \int (f\wedge g)(x)\, dx.\end{aligned}$$

- Montrer que $\pi \in \Pi(\mu,\nu)$.
- Montrer que

$$\begin{aligned}\int |x-y|^2\, \pi(dx,dy) \;&=\; \int |x|^2\, |f(x) - g(x)|\, dx \\ &\quad - \frac{2}{1-A} \int x\,(f(x) - (f\wedge g)(x))\, dx \cdot \int y\,(g(y) - (f\wedge g)(y))\, dy.\end{aligned}$$

- Montrer que

$$\left| \int x\,(f(x) - (f\wedge g)(x))\, dx \right| \;\le\; \left( \int |x|^2\, |f(x) - g(x)|\, dx \right)^{1/2} (1-A)^{1/2}.$$

- Conclure. □

**Lemme 1.5** *Pour toute mesure $\mu \in P(\mathbb{R}^d)$ et en notant $g_\varepsilon$ une suite régularisante de gaussiennes tendant vers l'identité ($g_\varepsilon(z) := (2\pi\,\varepsilon)^{d/2}\,\exp(-|z|^2/(2\varepsilon))$) on a*

$$w_2(\mu, \mu * g_\varepsilon) \le C\,\varepsilon^{1/2}.$$

*Indication pour la preuve du Lemme 1.5.* Pour $\mu$, $\nu \in P(\mathbb{R}^d)$ on définit $\bar\pi \in P(\mathbb{R}^{2d})$ par la relation : pour toute fonction $\varphi \in C_b(\mathbb{R}^{2d})$

$$\int \varphi\, d\bar\pi \;=\; \iint \varphi(x, x+y)\,\mu(dx)\nu(dy).$$

- Montrer que $\bar\pi \in \Pi(\mu, \mu * \nu)$.
- Montrer que

$$\mathcal{W}_2^2(\mu, \mu * \nu) \le \int |y|^2\,\nu(dy),$$

et conclure. □

*Indication pour la preuve du Théorème 1.2 .* Pour une suite $(g_\varepsilon)$ régularisante de gaussiennes et pour tout $X \in Q^N$ on note

$$\phi_\varepsilon = \mu * g_\varepsilon, \quad \hat\phi_X^{N,\varepsilon}(x) = (\hat\mu_X^N * g_\varepsilon)(x) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N g_\varepsilon(x - X_i).$$

- Montrer que

$$w_2^2(\hat\mu_X^N, \mu) \le 2\,[w_2^2(\hat\mu^N, \hat\phi_X^{N,\varepsilon}) + w_2^2(\hat\phi_X^{N,\varepsilon}, \phi_\varepsilon) + w_2^2(\phi_\varepsilon, \mu)],$$

et en déduire que

$$\mathcal{W}_2^2(\hat\mu_X^N, \delta_\mu) \le 2\,[2\,d\,\varepsilon + E_N w_2^2(\hat\phi_X^{N,\varepsilon}, \phi_\varepsilon)]. \tag{1.2}$$

- Montrer que

$$w_2^2(\hat\phi_X^{N,\varepsilon}, \phi_\varepsilon) \le C\,\sqrt{\int (1 + |x|^{d+5})\,|\hat\phi_X^{N,\varepsilon} - \phi_\varepsilon|^2\,dx}.$$

- Montrer que

$$E_N w_2^2(\hat\phi_X^{N,\varepsilon}, \phi^\varepsilon) \;\le\; C\,\sqrt{\int (1 + |x|^{d+5})\,E_N|\hat\phi_X^{N,\varepsilon} - \phi_\varepsilon|^2\,dx}.$$

- Montrer que

$$E_N(\phi_X^{N,\varepsilon} - \phi^\varepsilon)^2 = \frac{1}{N}\left\{(g_\varepsilon)^2 * \mu - (g_\varepsilon * \mu)^2\right\}.$$

- Montrer que

$$E_N w_2^2(\hat\phi_X^{N,\varepsilon}, \phi^\varepsilon) \le C\,N^{-1/2}\,\varepsilon^{-d/4}. \tag{1.3}$$

On conclut en combinant (1.2) et (1.3) et choisissant $\varepsilon = N^{-2/(d+4)}$. □