Université Paris-Dauphine **2008-2009**
Cours de Processus Continus Avril 2009

ENSEIGNANT-CHERCHEUR EN LUTTE CONTRE LA L. R. U.

CHAPITRE 2 - INTEGRALE D'ITO ET EQUATIONS DIFFERENTIELLES STOCHASTIQUES BROWNIENNES

1 Introduction

On veut définir l'intégrale *aléatoire*

$$\int_0^t \phi\, dX \tag{1.1}$$

pour une fonction (éventuellement aléatoire) ϕ et un processus X (en particulier pour le mouvement brownien $X = B$). L'intégrale de Lebesgue classique permet de définir cette quantité lorsque dX est une mesure (de Stieltjes, par exemple lorsque X est de classe C^1), en posant

$$\int_0^t \phi\, dX = \int_0^t \phi(s)\, X'(s)\, ds.$$

Mais le terme de droite n'a pas de sens lorsque X est le mouvement brownien puisque $X'(s)$ n'est pas défini!

- Pour un intégrant déterministe (i.e $\phi = \phi(t)$ ne dépend pas de l'aléa $\omega \in \Omega$), il s'agit de l'intégrale de Wiener (environ 1930) qui peut être construite pour la classe (extrêmement large) des processus de carré sommable et à accroissements orthogonaux, voir par exemple [Lac], dont le mouvement brownien fait partie.

- Afin de traiter le cas d'intégrants aléatoires (i.e. lorsque $\phi = \phi(t, \omega)$), ce qui est fondamental pour certaines applications, notamment la résolution des équations différentielles stochastiques, il s'agit de l'intégrale d'Itô (environ 1950) pour laquelle on doit se restreindre à la classe des semi-martingales càdlag, dont les processus PAIScàd et en particulier le mouvement brownien font partie, on renvoie à [Pro] pour la théorie générale, et enfin à [Leg2] en ce qui concerne cette théorie dans le cadre des semi-martingales continues. Nous nous contentons de construire l'intégrale d'Itô dans le cas du mouvement brownien.

L'intégrale stochastique (1.1) dépend de trois arguments:

- Le processus stochastique X le long duquel nous intégrons. Ici nous faisons le choix le plus simple: nous ne considérons que le cas où on intègre le long d'un mouvement brownien (et par extension immédiate le long d'un processus d'Itô).

- Du processus intégrant ϕ. Ici nous faisons un choix assez général: $\phi = \phi(s, \omega)$ peut dépendre de l'aléa. On se restreint au cas de processus bornés dans L^2 (et non pas "presque sûrement bornés dans L^2", ce dernier cas faisant appel à des temps d'arrêt).

- Le temps sur lequel on intègre. Ici nous faisons le choix le plus simple. Le temps reste sur un intervalle borné (cela permet quelques simplifications mineurs: par exemple, dans la preuve du théorème de Girsanov la tribu $\mathcal{F}_T^B$ existe par hypothèse alors que dans le cas "à horizon infini" la tribu $\mathcal{F}_\infty^B$ (qui joue le même rôle) doit être "construite").

L'objectif de ce chapitre est donc de construite une intégrale d'Itô pour un mouvement brownien B et un intégrant ϕ, intégrale que l'on notera (indifféremment)

$$\int_0^t \phi\, dB = \int_0^t \phi_s\, dB_s = I[\phi]_t = (\phi \bullet B)_t.$$

Cette intégrale satisfera les propriétés suivantes:
(i) L'application $\phi \mapsto (\phi \bullet B)_t$ est linéaire;
(ii) L'application $t \mapsto (\phi \bullet B)_t$ est continue p.s.;
(iii) Le processus $(\phi \bullet B)_t$ est une $\mathcal{F}^B$-martingale;
(iv) L'identité d'isométrie suivante est satisfaite

$$\mathbf{E}\left[\left(\int_0^t \phi_s dB_s\right)^2\right] = \mathbf{E}\left[\int_0^t \phi_s^2 \, ds\right];$$

(v) L'estimation uniforme suivante est satisfaite

$$\mathbf{E}\left[\sup_{[0,T]}\left(\int_0^t \phi_s dB_s\right)^2\right] \leq 4\,\mathbf{E}\left[\int_0^T \phi_s^2 \, ds\right];$$

Pour un fonction réelle de la forme

$$X_t := X_0 + \int_0^t dX_s = X_0 + \int_0^t \psi_s \, ds, \quad \text{avec donc} \quad dX_s = \psi_s \, ds,$$

et disons $\psi \in C(\mathbb{R})$ de sorte que X est de classe C^1, on sait que pour toute fonction $f \in C^1(\mathbb{R})$ on a

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s) \, dX_s. \tag{1.2}$$

Pour un mouvement brownien B, qui n'est pas de classe C^1 (ni même à "variation bornée" de sorte que dB n'est pas une mesure de Stieltjes), la "relation fondamentale du calcul intégral" (1.2) n'est plus vraie et doit être modifiée. La relation jouant le rôle de (1.2) s'appelle la formule d'Itô.

Pour une intégrale stochastique ou plus généralement un *processus d'Itô réel*

$$X_t := X_0 + \int_0^t \phi_s \, dB_s + \int_0^t \psi_s \, ds$$

que l'on note sous forme différentielle

$$dX_t = \phi_t \, dB_t + \psi_t \, dt,$$

et auquel on associe sa variation quadratique

$$\langle X \rangle_t = \int_0^t \phi_s^2 \, ds \quad \text{(en particulier on retrouve } \langle B \rangle_t = t\text{)},$$

on démontrera la formule d'Ito, qui est donc l'analogue d'une formule intégrale de Taylor au premier ordre dans le cas de l'intégrale de Lebesgue, et s'écrit

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_t) \, dX_t + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_t) \, d\langle X \rangle_t.$$

Le dernier terme provient du fait que moralement $dB_t = \sqrt{dt}$ (la formule exacte étant celle faisant intervenir la variation quadratique) et donc que le terme faisant intervenir $f''(X_t)$ ne peut pas être négligé (puisqu'il est de l'ordre de dt). Bien sûr le miracle de l'intégrale d'Ito est que le terme en $dB_t = \sqrt{dt}$ ne fait pas exploser l'intégrale à cause du caractère "martingale" (et donc moyenne nulle) du mouvement brownien.

2 Intégrale stochastique d'Itô brownienne

2.1 Intégrale brownienne des processus en escalier progressivement mesurables

Dans toute cette section, on considère un mouvement brownien B sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ muni de la filtration canonique $\mathcal{F}^B$ ou d'une filtration $\mathcal{F}$ à laquelle B est adapté ($\mathcal{F}_t^B \subset \mathcal{F}_t \ \forall t \in \mathbb{T}$).

Définition 2.1 *On définit l'espace vectoriel des processus en escalier progressivement mesurables et de carré intégrable $\mathscr{E}sc(\mathbb{T} \times \Omega; \mathcal{F}_t\text{-}Prog, dtdP)$, on note également $\mathscr{E}sc(\mathbb{T}; \mathcal{F}_t\text{-}Prog)$ ou seulement $\mathscr{E}sc(Prog)$, comme étant l'espace des processus $\phi = \phi(s, \omega)$ de la forme*

$$\phi(t, \omega) = \sum_{k=0}^{n-1} \phi_k(\omega)\, \mathbf{1}_{]t_k, t_{k+1}]}(s), \tag{2.1}$$

avec $0 = t_0 < ... < t_n \in \mathbb{T}$ et $\phi_k \in L^2(\mathcal{F}_{t_k}^B)$ pour tout $k = 0, ..., n-1$.

Définition 2.2 *Pour tout processus $\phi \in \mathscr{E}sc(\mathbb{T} \times \Omega; \mathcal{F}_t\text{-}Prog, dtdP)$ dont l'expression est donnée par (2.1), on définit l'intégrale stochastique brownienne de ϕ comme étant la variable aléatoire*

$$\forall\, \omega \in \Omega \qquad \left(\int_{\mathbb{T}} \phi\, dB\right)(\omega) := \sum_{k=0}^{n-1} \phi_k(\omega)\, (B(t_{k+1}, \omega) - B(t_k, \omega)),$$

et plus généralement comme étant le processus stochastique défini par

$$\begin{aligned} \forall\, t \in \mathbb{T},\ ,\forall\, \omega \in \Omega \qquad (\phi \bullet B)_t(\omega) = \left(\int_0^t \phi\, dB\right)(\omega) \quad &:= \quad \sum_{j=0}^{k-1} \phi_j\, (B_{t_{j+1}} - B_{t_j}) + \phi_k\, (B_t - B_{t_k}) \\ &:= \quad \sum_{j=0}^{n-1} \phi_j\, (B_{t_{j+1}\wedge t} - B_{t_j})\, \mathbf{1}_{t_j \le t} \\ &:= \quad \sum_{j=0}^{n-1} \phi_j\, (B_{t_{j+1}\wedge t} - B_{t_j \wedge t}), \end{aligned}$$

avec k choisi dans la premier identité de sorte que $t_k \le t < t_{k+1}$ ou $k = n$, et avec la notation $a \wedge b :=$ $\min(a, b)$ pour deux réels $a, b \in \mathbb{R}$. L'égalité entre la deuxième et la troisième définition résulte de ce que $(B_{t_{j+1}\wedge t} - B_{t_j})\, \mathbf{1}_{t_j \le t} = B_{t_{j+1}\wedge t} - B_{t_j \wedge t}$ pour tout t et tout j. Il est alors clair que l'intégrale stochastique est un processus adapté à la filtration $\mathcal{F}_t$ et à trajectoire continue p.s. (cela se lit sur la troisième expression par exemple).

Remarquons que la définition de l'intégrale stochastique comme processus se ramène à la définition de l'intégrale stochastique comme variable aléatoire en prenant $\mathbb{T} = [0, t]$ ou en posant

$$\left(\int_0^t \phi\, dB\right)(\omega) := \int_{\mathbb{T}} \left[\phi(s, \omega)\, \mathbf{1}_{[0,t]}(s)\right]\, dB_s(\omega),$$

et en remarquant que

$$\phi(s)\, \mathbf{1}_{[0,t]}(s) = \sum_{j=0}^{n-1} \phi_j\, \mathbf{1}_{]t_j \wedge t, t_{j+1}\wedge t]} = \sum_{j=0}^{k-1} \phi_j\, \mathbf{1}_{]t_j, t_{j+1}]} + \phi_k\, \mathbf{1}_{]t_k, t]} \quad \text{si} \quad t_k \le t < t_{k+1}.$$

On conservera donc (parfois!) la notation $\mathbb{T}$ à la place de $[0, t]$.

Lemme 2.3 *Pour tout processus $\phi \in \mathscr{E}sc(\mathbb{T};\mathcal{F}_t\text{-}Prog)$ l'intégrale stochastique brownienne associée satisfait*

$$\mathbf{E}\left|\int_{\mathbb{T}} \phi\, dB\right|^2 = \mathbf{E}\left(\int_{\mathbb{T}} |\phi(t,\omega)|^2\, dt\right) = \|\phi\|^2_{L^2(\mathbb{T}\times\Omega)}.$$

Preuve du Lemme 2.3. On calcule

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\left(\int_{\mathbb{T}} \phi\, dB\right)^2 &= \mathbf{E}\left[\sum_{k,j=0}^{n-1} \phi_k\,(B_{t_{k+1}} - B_{t_k})\,\phi_j\,(B_{t_{j+1}} - B_{t_j})\right] \\
&= 2\sum_{j<k} \mathbf{E}\left[(B_{t_{k+1}} - B_{t_k})\,\phi_k\,\phi_j\,(B_{t_{j+1}} - B_{t_j})\right] + \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{E}\left[\phi_k^2\,(B_{t_{k+1}} - B_{t_k})^2\right] \\
&= 2\sum_{j<k} \mathbf{E}[B_{t_{k+1}} - B_{t_k}]\,\mathbf{E}[\phi_k\,\phi_j\,(B_{t_{j+1}} - B_{t_j})] + \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{E}\,(B_{t_{k+1}} - B_{t_k})^2\,\mathbf{E}\,\phi_k^2 \\
&= \sum_{k=0}^{n-1}(t_{k+1} - t_k)\,\mathbf{E}\,\phi_k^2 = \mathbf{E}\left[\sum_{k=0}^{n-1}(t_{k+1} - t_k)\,\phi_k^2\right] = \mathbf{E}\left(\int_{\mathbb{T}} |\phi(t,\cdot)|^2\, dt\right),
\end{aligned}$$

où on a utilisé le fait que $B_{t_{k+1}} - B_{t_k}$ est indépendant des autres va (qui appartiennent toutes à $\mathcal{F}_{t_k}$). □

Lemme 2.4 *Pour tout processus $\phi \in \mathscr{E}sc(\mathbb{T};\mathcal{F}_t\text{-}Prog)$ l'intégrale stochastique brownienne associée est une martingale, en particulier $\mathbf{E}(\phi \bullet B_t) = 0\ \forall\, t \geq 0$.*

Preuve du Lemme 2.4. Soit $s,t \in \mathbb{T}$, $s < t$. On suppose qu'il existe $k \in \{0,...,n-1\}$ tel que $t_k \leq s < t_{k+1}$ (le cas $s > t_n$ se traite de la même manière, et même plus simplement). On calcule

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\left(\int_0^t \phi\, dB\Big|\mathcal{F}_s\right) &= \sum_{j=0}^{n-1} \mathbf{E}\left(\phi_j\,(B_{t_{j+1}\wedge t} - B_{t_j})\Big|\mathcal{F}_s\right)\,\mathbf{1}_{t_j\leq t} \\
&= \sum_{j=0}^{k-1} \mathbf{E}\left(\phi_j\,(B_{t_{j+1}} - B_{t_j})\Big|\mathcal{F}_s\right) + \mathbf{E}\left(\phi_k\,(B_{t_{k+1}\wedge t} - B_{t_k})\Big|\mathcal{F}_s\right) \\
&\quad + \sum_{j=k+1}^{n-1} \mathbf{E}\left(\phi_j\,(B_{t_{j+1}\wedge t} - B_{t_j})\Big|\mathcal{F}_s\right)\,\mathbf{1}_{t_j\leq t}
\end{aligned}$$

Comme $\sigma[\phi_j\,(B_{t_{j+1}} - B_{t_j})] \subset \mathcal{F}_{t_k} \subset \mathcal{F}_s$ pour tout $j \leq k-1$, le premier terme donne

$$\sum_{j=0}^{k-1} \mathbf{E}\left(\phi_j\,(B_{t_{j+1}} - B_{t_j})\Big|\mathcal{F}_s\right) = \sum_{j=0}^{k-1} \phi_j\,(B_{t_{j+1}} - B_{t_j}).$$

Comme $B_{t_{j+1}\wedge t} - B_{t_j}$ est indépendant de $\mathcal{F}_{t_j} \supset \mathcal{F}_s$ pour tout $j \geq k+1$ avec $t_j \leq t$, le denier terme donne

$$\begin{aligned}
\sum_{j=k+1}^{n-1} \mathbf{E}\left(\phi_j\,(B_{t_{j+1}\wedge t} - B_{t_j})\Big|\mathcal{F}_s\right)\,\mathbf{1}_{t_j\leq t} &= \sum_{j=k+1}^{n-1} \mathbf{E}\left(\mathbf{E}\left(\phi_j\,(B_{t_{j+1}\wedge t} - B_{t_j})\Big|\mathcal{F}_{t_j}\right)\Big|\mathcal{F}_s\right)\,\mathbf{1}_{t_j\leq t} \\
&= \sum_{j=k+1}^{n-1} \mathbf{E}\left(\phi_j\,\mathbf{E}(B_{t_{j+1}\wedge t} - B_{t_j})\Big|\mathcal{F}_s\right)\,\mathbf{1}_{t_j\leq t} = 0.
\end{aligned}$$

Enfin, le deuxième terme s'écrit

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\left(\phi_k\,(B_{t_{k+1}\wedge t}-B_{t_k})\Big|\mathcal{F}_s\right) &= \mathbf{E}\left(\phi_k\,(B_{t_{k+1}\wedge t}-B_s)\Big|\mathcal{F}_s\right)+\mathbf{E}\left(\phi_k\,(B_s-B_{t_k})\Big|\mathcal{F}_s\right)\\
&= \phi_k\,\mathbf{E}(B_{t_{k+1}\wedge t}-B_s)+\phi_k\,(B_s-B_{t_k})=\phi_k\,(B_s-B_{t_k}).
\end{aligned}$$

On obtient donc

$$\mathbf{E}\left(\int_0^t \phi\,dB\Big|\mathcal{F}_s\right)=\sum_{j=0}^{k-1}\phi_j\,(B_{t_{j+1}}-B_{t_j})+\phi_k\,(B_s-B_{t_k}),$$

en recollant les morceaux, ce qui est le résultat annoncé. ◻

Exercice 2.5 *a) Montrer que pour tout $\phi\in\mathscr{E}sc(Prog)$, le processus M_t défini par*

$$M_t:=X_t^2-\int_0^t\phi_s^2\,ds,\quad X_t:=\int_0^t\phi_s\,dB_s,$$

est une martingale continue centrée.
b) - En déduire que pour tout ϕ, $\psi\in\mathscr{E}sc(\mathbb{T},Prog)$, le processus M_t défini par

$$M_t:=X_t\,Y_t-\int_0^t\phi_s\,\psi_s\,ds,\quad X_t:=\int_0^t\phi_s\,dB_s,\quad Y_t:=\int_0^t\psi_s\,dB_s,$$

est une martingale continue centrée.

2.2 Intégrale brownienne des processus progressivement mesurables de carré sommable

L'idée maintenant est de définir l'intégrale stochastique pour un intégrant général $\phi\in L^2(\mathbb{T},\mathrm{Prog})$ par

$$\int\phi\,dB:=\lim\int\phi_n\,dB,$$

avec (ϕ_n) une suite de fonctions en escalier convergeant vers ϕ. Comme cela se fait très souvent en analyse, on montre que la suite de droite est une suite de Cauchy, et l'intégrale stochastique est alors, par définition, le processus limite obtenu. Afin que cette intégrale soit à la fois un processus adapté à la filtration $\mathcal{F}^B$ et un processus continu nous sommes amenés à "gonfler" un peu celle-ci afin qu'elle contienne tous les ensembles négligeables. On définit dorénavant

$$\mathcal{F}_t:=\sigma(B_s,\,0\le s\le t)\vee\mathcal{N},$$

où $\mathcal{N}$ désigne la collection des ensembles négligeables.

Définition 2.6 - *Un processus ϕ sur $\mathbb{T}\times\Omega$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ est dit progressivement mesurable si pour tout $t\in\mathbb{T}$ la va $(s,\omega)\mapsto\phi(s,\omega)$ de $[0,t]\times\Omega\to\mathbb{R}^d$ est $\mathcal{B}[0,t]\otimes\mathcal{F}_t$-mesurable.*
- On note $L^p(\mathbb{T}\times\Omega;\mathcal{F}_t\text{-}Prog,dtdP)$, ou seulement $L^p(\mathbb{T},\mathcal{F}_t\text{-}Prog)$, l'espace des processus ϕ progressivement mesurables sur $\mathbb{T}\times\Omega$ bornés dans $L^p(\mathbb{T}\times\Omega,\mathcal{B}(\mathbb{T})\otimes\mathcal{A},\mathbf{P})$

Lemme 2.7 *On a $\mathscr{E}sc(\mathbb{T}\times\Omega;Prog,dtdP)\subset L^2(\mathbb{T}\times\Omega;Prog,dtdP)$.*

Preuve du Lemme 2.7. D'une part, en définissant k par $t_k\le t<t_{k+1}$, on a

$$\phi|_{[0,t]\times\Omega}(s,\omega)=\sum_{j=0}^{k}\phi_j(\omega)\,\mathbf{1}_{]t_j,t_{j+1}\wedge t]}(s)\ \text{est}\ \mathcal{F}_t\text{-mesurable}$$

puisque alors $\sigma(\phi_j) \subset \mathcal{F}_{t_j} \subset \mathcal{F}_{t_k} \subset \mathcal{F}_t$ pour tout $j \leq k$. D'autre part, on a

$$\int_{\mathbb{T}\times\Omega} |\phi|^2 \, dsdP = \sum_{j=0}^{n-1} \mathbf{E}(|\phi_j|^2)\,(t_{j+1} - t_j),$$

qui est fini. $\square$

Lemme 2.8 *Les espaces $L^p(\mathbb{T}, \mathcal{F}_t\text{-}Prog)$ sont des espaces de Banach, l'espace $L^2(\mathbb{T}, \mathcal{F}_t\text{-}Prog)$ est un espace de Hilbert.*

Lemme 2.9 *- Pour tout processus $\phi \in L^2(\mathbb{T}\times\Omega; \mathcal{F}_t\text{-}Prog, dtdP)$ il existe une suite (ϕ_n) de processus de $\mathscr{E}sc(\mathbb{T}\times\Omega; \mathcal{F}_t\text{-}Prog, dtdP)$ telle que*

$$\mathbf{E}\left(\int_{\mathbb{T}} |\phi(t,\cdot) - \phi_n(t,\cdot)|^2 \, dt\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

- Pour tout processus continu (ou càd) et progressivement mesurable ϕ, on peut définir (ϕ_n) en posant

$$\phi_n(t) = \phi(t^n_k) \quad \forall\, t \in \Delta^n_k :=]t^n_k, t^n_{k+1}],$$

avec $(t^n_k)_{0\leq k\leq n-1}$ suite de $\mathbb{T}$ telle que $t^n_0 = 0$ et $\forall\, k\ t^n_{k+1} - t^n_k = \delta^n \to 0$ lorsque $n \to \infty$.

Preuve du Lemme 2.9. Dans le cas général, on définit

$$\phi_n(t,\omega) := \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\delta^n} \left(\int_{\Delta^n_{k-1}} \phi(s,\omega)\, ds\right) \mathbf{1}_{\Delta^n_k}(t), \qquad \Delta^n_k :=]t^n_k, t^n_{k+1}].$$

On voit que ϕ_n est progressivement mesurable et dans L^2 car ϕ l'est.
Pour $\psi \in L^2(\mathbb{T})$, on définit

$$\xi_n[\psi] := \int_{\mathbb{T}} |\psi(t) - \psi_n|^2 \, dt, \quad \psi_n(t) := \sum_{k=1}^{n-1} \psi^n_k \, \mathbf{1}_{\Delta^n_k}(t), \qquad \psi^n_k := \frac{1}{\delta^n} \int_{\Delta^n_{k-1}} \psi(s)\, ds.$$

Alors, d'une part par Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{T}} |\psi_n(t)|^2 \, dt &= \int_{\mathbb{T}} \sum_{j,k} \frac{1}{(\delta^n)^2} \left(\int_{t^n_{j-1}}^{t^n_j} \psi(s)\, ds\right) \mathbf{1}_{]t^n_j, t^n_{j+1}]}(t) \left(\int_{t^n_{k-1}}^{t^n_k} \psi(s)\, ds\right) \mathbf{1}_{]t^n_k, t^n_{k+1}]}(t)\, dt \\
&= \sum_k \frac{1}{(\delta^n)^2} \left(\int_{t^n_{j-1}}^{t^n_j} \psi(s)\, ds\right)^2 \int_{\mathbb{T}} \mathbf{1}_{]t^n_j, t^n_{j+1}]}(t)\, dt \\
&\leq \sum_k \int_{t^n_{j-1}}^{t^n_j} |\psi(s)|^2 \, ds = \int_{\mathbb{T}} |\psi(s)|^2 \, ds,
\end{aligned}$$

ce qui implique que

$$\xi_n[\psi] \leq 4 \int_{\mathbb{T}} |\psi(s)|^2 \, ds. \tag{2.2}$$

D'autre part, si $\psi \in C_c(\mathbb{T})$ et si ν désigne le module de continuité uniforme de ψ, on a

$$\begin{aligned}
\xi_n[\psi] &= \int_{\mathbb{T}} \left| \sum_k (\psi(t) - \psi^n_k) \mathbf{1}_{\Delta^n_k}(t) \right|^2 dt \\
&= \int_{\mathbb{T}} \sum_k |\psi(t) - \psi^n_k|^2 \mathbf{1}_{\Delta^n_k}(t)\, dt \\
&= \sum_k \int_{\Delta^n_k} |\psi(t) - \psi^n_k|^2 \, dt \leq \sum_k \mathbf{1}_{\{\mathrm{supp}\,\psi\cap\Delta^n_k\neq\emptyset\}}\, \nu(\delta^n)^2 \leq C_\psi\, \nu(\delta^n)^2 \to 0
\end{aligned}$$

lorsque $n \to \infty$. Donc par densité $C_c(\mathbb{T}) \subset L^2(\mathbb{T})$, on a également pour tout $\psi \in L^2(\mathbb{T})$

$$\xi_n[\psi] \to 0 \quad \text{lorsque} \quad n \to \infty. \tag{2.3}$$

En combinant (2.2), (2.3) avec $\psi = \phi(\cdot, \omega)$ et le théorème de convergence dominée on obtient

$$\int_\Omega \xi_n[\phi(\cdot,\omega)]\, dP(\omega) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

ce qui est précisément le résultat annoncé. ◫

Définition 2.10 *Soit $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ une filtration et $M = (M_t)$ un processus sommable et $\mathcal{F}$-adapté, c'est-à-dire tel que M_t est $\mathcal{F}_t$-mesurable pour tout $t \geq 0$. On dit que M est*

- *une $\mathcal{F}$-martingale si, pour tout $s \leq t$, $\mathbf{E}(M_t|\mathcal{F}_s) = M_s$;*
- *une $\mathcal{F}$-surmartingale si, pour tout $s \leq t$, $\mathbf{E}(M_t|\mathcal{F}_s) \leq M_s$;*
- *une $\mathcal{F}$-sousmartingale si, pour tout $s \leq t$, $\mathbf{E}(M_t|\mathcal{F}_s) \geq M_s$.*

Proposition 2.11 *(i) Soit X une va et $\mathcal{B}$ une sous-tribu de $\mathcal{A}$. On a l'inégalité de Jensen $|\mathbf{E}^{\mathcal{B}} X| \leq \mathbf{E}^{\mathcal{B}}|X|$.*
(ii) Soit M une $\mathcal{F}$-Martingale, alors $|M|$ est une $\mathcal{F}$-sousmartingale.
(iii) Soit M une martingale de carré intégrable et càd, alors on a l'inégalité Maximale de Doob

$$\forall\, t > 0 \qquad \mathbf{E}[\max_{0\leq s\leq t} |M(s)|^2] \leq 4\,\mathbf{E}[M^2(t)],$$

en particulier, la variable aléatoire $\max_{0\leq s\leq t} |M(s)|^2$ est intégrable.

Preuve du Lemme 2.11. (i) Par définition on a $\mathbf{E}(\mathbf{E}^{\mathcal{B}} X\, Z) = \mathbf{E}(X\, Z)$ pour tout $0 \leq Z \in L^1(\mathcal{B})$. On a donc pour tout $0 \leq Z \in L^1(\mathcal{B})$, et en notant $Z' := Z \operatorname{sign} \mathbf{E}^{\mathcal{B}} X \in L^1(\mathcal{B})$,

$$\mathbf{E}(|\mathbf{E}^{\mathcal{B}} X|\, Z) = \mathbf{E}(\mathbf{E}^{\mathcal{B}} X\, Z') = \mathbf{E}(X\, Z') \leq \mathbf{E}(|X|\, Z) = \mathbf{E}(\mathbf{E}^{\mathcal{B}}|X|\, Z).$$

(ii) Par (i) on a $\mathbf{E}(|M_t|\,|\,\mathcal{F}_s) \geq |\mathbf{E}(M_t\,|\,\mathcal{F}_s)| = M_s$.
(iii) On introduit une suite (t_j^n) de temps définie par $t_j^n := j\,t/n$, la sous-martingale $S(t) := |M(t)|$ et le processus croissant $X_j := \sup_{0\leq k\leq j} S(t_k)$ et $X_{-1} = 0$. La différence $X_{j+1}^2 - X_j^2 = (X_{j+1} - X_j)(X_{j+1} + X_j)$ est majorée par $2\, S_{t_{j+1}}\, (X_{j+1} - X_j)$ (faire une disjonction des cas $X_{j+1} = X_j$ et $X_{j+1} > X_j$) de sorte que par définition d'une sous-martingale $\mathbf{E}(S_{t_{j+1}}|\mathcal{F}^M_{t_{j+1}}) \leq \mathbf{E}(S_t|\mathcal{F}^M_{t_{j+1}})$ et donc

$$\forall\, j \leq n-1 \qquad \mathbf{E}[X_{j+1}^2 - X_j^2] \leq \mathbf{E}[2\, S_{t_{j+1}}\, (X_{j+1} - X_j)] \leq 2\mathbf{E}[S_t\, (X_{j+1} - X_j)].$$

En sommant cette inégalité entre $j = 0$ et $j = n-1$ et en utilisant Cauchy-Schwarz on a

$$\mathbf{E}[X_n^2] \leq 2\mathbf{E}[S_t\, X_n] \leq 2\,\mathbf{E}[S_t^2]^{1/2}\mathbf{E}[X_n^2]^{1/2},$$

ce qui prouve

$$\mathbf{E}[\sup_{0\leq k\leq n} M_{t_k}^2] \leq 4\mathbf{E}[M_t^2].$$

On conclut en passant à la limite $n \to \infty$ et en utilisant le fait que M est càd. ◫

Définition-Théorème 2.12 *Il existe une application linéaire continue I de $L^2(\mathbb{T}, Prog)$ dans $\mathscr{M}_c^2(\mathbb{T})$ l'espace des martingales réelles, continues, de carré intégrable, ayant les propriétés suivantes:*

(a) Si $\phi \in \mathscr{E}sc(\mathbb{T}; Prog)$ on a $I(\phi)(t) = \int_0^t \phi_s\, dB_s$;

(b) Pour tout $\phi \in L^2(\mathbb{T}, Prog)$ et tout $t \in \mathbb{T}$

$$\mathbf{E}\left(I(\phi)(t)^2\right) = \mathbf{E}\left(\int_0^t |\phi_s|^2\, ds\right).$$

et

$$\mathbf{E}\left(\sup_{[0,T]} I(\phi)(t)^2\right) \le 4\mathbf{E}\left(\int_0^T |\phi_s|^2\, ds\right).$$

On note encore $I(\phi)(t) = (\phi \bullet B)_t = \displaystyle\int_0^t \phi_s\, dB_s$ l'intégrale brownienne de ϕ.

Remarque 2.13 *Prenons maintenant $\phi := B\,\mathbf{1}_{[0,T]}$ que l'on peut approcher par*

$$\psi_n := \sum_{k=0}^{n-1} B_{t_{k+1}}\,\mathbf{1}_{]t_{k+1},t_k[} \quad ou \quad \phi_n := \sum_{k=0}^{n-1} B_{t_k}\,\mathbf{1}_{]t_{k+1},t_k[}.$$

On a alors

$$\int \psi_n\, dB - \int \phi_n\, dB = \sum_{k=0}^{n-1} (B_{t_{k+1}} - B_{t_k})^2 \to T$$

lorsque $k \to \infty$. Cet exemple montre qu'il est important de choisir quelle approximation on fait lorsque l'on construit l'intégrale stochastique. Comme Itô, nous faisons le choix de l'approximation non anticipante ϕ_n. Le choix de l'approximation anticipante ψ_n conduit à l'intégrale de Stratonovitch (date?) qui est légèrement différente de (mais équivalente à) celle d'Itô.

Preuve du Théorème 2.12. On considère (ϕ_n) une suite de $\mathscr{E}$sc(Prog) telle que $\phi_n \to \phi$ dans L^2(Prog). Comme l'intégrale stochastique $M_n := \phi_n \cdot B$ est une Martingale, il en est de même du processus $M_m - M_n$, de sorte que l'inégalité de Doob et l'isométrie dans L^2 donnent

$$\mathbf{E}\left(\sup_{t\in[0,T]} |M_m(t) - M_n(t)|^2\right) \le 4\mathbf{E}(|M_m(T) - M_n(T)|^2) = 4\mathbf{E}\left(\int_0^T (\phi_m - \phi_n)^2\, dt\right) \to 0$$

lorsque $m, n \to \infty$. Cela montre que $M_n|_{[0,T]}$ est une suite de Cauchy dans l'espace de Hilbert $L^2(\Omega, \mathcal{F}_T, P; C([0,T]))$ de sorte que (M_n) admet une limite M, notée par la suite $M = \phi \bullet B$. Par construction on a donc
(i) $t \mapsto M_t(\omega)$ est continue p.s. ;
(ii) M satisfait évidemment la second borne de (b) ainsi que la relation d'isométrie puisqu'en particulier pour tout $t \in [0,T]$ on a

$$\mathbf{E}\, M_t^2 = \lim_{n\to\infty} \mathbf{E}\, M_{nt}^2 = \lim_{n\to\infty} \mathbf{E} \int_0^t \phi_n^2\, ds = \mathbf{E}\int_0^t \phi^2\, ds.$$

(iii) De $M_n(t) \in \mathcal{F}_t$ pour tout $n \ge 1$ on tire qu'à la limite $M(t) \in \mathcal{F}_t$.

C'est ici que l'on utilise un argument un peu subtil de mesurabilité. On a d'une part que $M_n(t) \to M(t)$ p.s. dans $\mathcal{F}_T$. D'autre part, puisque $M_n(t) \in L^2(\mathcal{F}_t)$ il existe $M_t^* \in L^2(\mathcal{F}_t)$ tel que $M_n(t) \to M_t^*$ p.s. dans $\mathcal{F}_t$. On en déduit que $M_t^* \equiv M(t)$ comme fonctions $\mathcal{F}_T$-mesurables. Cela signifie qu'il existe $B \in \mathcal{F}_T$ tel que $M(t)(\omega) = M_t^*(\omega)\ \forall\, \omega \in B$ et $B^c \subset \mathcal{N}_T$ négligeable de $\mathcal{F}_T$. Comme par hypothèse $\mathcal{N}_T \subset \mathcal{F}_t$ on a donc $B, B^c \in \mathcal{F}_t$. Cela démontre que $M(t)$ est $\mathcal{F}_t$ mesurable.

(iv) Enfin $M_n(t) \to M(t)$ dans L^2 implique $\mathbf{E}(M_n(t)|\mathcal{F}_s) \to \mathbf{E}(M(t)|\mathcal{F}_s)$ dans L^2, et en revenant à la définition de l'espérance conditionnelle et d'une martingale on a pour tout $Z \in L^2(\mathcal{F}_s)$

$$\mathbf{E}(M(s)\, Z) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{E}(M_n(s)\, Z) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{E}(\mathbf{E}(M_n(t)|\mathcal{F}_s)\, Z) = \mathbf{E}(\mathbf{E}(M(t)|\mathcal{F}_s)\, Z),$$

ce qui est exactement dire que M_t est une $\mathcal{F}$-martingale. ◫

On a ainsi, entre autre, démontré le résultat suivant

Lemme 2.14 *Si M^n est une suite de Martingales qui converge $M^n_t \to M_t$ dans L^1 pour tout $t \geq 0$, alors M est encore une martingale.*

2.3 Intégrale de Wiener

Si $\phi = \phi_s$ est une fonction déterministe alors $\phi \bullet B_t$ est un processus gaussien.

3 Processus d'Itô et formule d'Itô

3.1 Formule d'Itô dans le cas brownien

Théorème 3.1 *Soit B un mouvement brownien réel et soit f une fonction de classe $C^2_b(\mathbb{R})$, ce qui signifie que f est de classe C^2 et que f, f' et f'' sont des fonctions bornées. Alors*

$$f(B_t) = f(B_0) + \int_0^t f'(B_s)\, dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(B_s)\, ds. \tag{3.1}$$

Remarque 3.2 *En prenant B un mouvement brownien standard et $f(x) = x^2$, on retrouve*

$$B_t^2 - t = 2\int_0^t B_s\, dB_s \text{ est une martingale, et donc } \mathbf{E}(B_t^2) = t,$$

puisque l'intégrale brownienne est une martingale donc d'espérance nulle. Bien sûr, appliquer la formule d'Ito à la fonction $f(x) = x^2$ n'est pour l'instant pas licite, mais on montrera que la formule est valable dès que $f \in C^2(\mathbb{R})$ avec $f'(B_s) \in L^2$ et $f''(B_s) \in L^1$.

Preuve du théorème 3.1. On introduit une suite de temps $0 = t_0 < t_1 \leq ... \leq t_n = t$ avec $t_k := k\,t/n$ de sorte que

$$\begin{aligned} f(B_t) &= f(B_0) + \sum_{i=1}^n [f(B_{t_i}) - f(B_{t_{i-1}})] \\ &= f(B_0) + \sum_{i=1}^n f'(B_{t_{i-1}})\,(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n f''(\theta_i)\,(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2, \end{aligned}$$

avec θ_i dans l'intervalle $(B_{t_{i-1}}, B_{t_i})$. Le second terme s'écrit

$$\sum_{i=1}^n f'(B_{t_{i-1}})\,(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}) = \int_0^t \phi_n(s)\, dB_s$$

avec

$$\phi_n(s) = \sum_{i=1}^n f'(B_{t_{i-1}})\,\mathbf{1}_{t_{i-1} < s \leq t_i} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f'(B_s) \quad \text{dans} \quad L^2([0,t]\times\Omega; \text{Prog}). \tag{3.2}$$

En effet, par inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\left[\int_0^t (\phi_n(s) - f'(B_s))^2\, ds\right] &= \sum_{i=1}^n \mathbf{E}\left[\int_{t_{i-1}}^{t_i} (f'(B_{t_{i-1}}) - f'(B_s))^2\, ds\right] \\ &\leq \|f''\|^2_\infty \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \mathbf{E}\left[(B_s - B_{t_{i-1}})^2\right]\, ds \\ &\leq \|f''\|^2_\infty \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} (s - t_{i-1})^2\, ds = \|f''\|^2_\infty \sum_{i=1}^n \frac{1}{2}\,\big(\frac{t}{n}\big)^2 \to 0. \end{aligned}$$

Par construction de l'intégrale stochastique brownienne, on a donc

$$\sum_{i=1}^{n} f'(B_{t_{i-1}})\,(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_0^t f'(B_s)\,dB_s.$$

Pour le troisième terme, on écrit

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} f''(\theta_i)\,(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2 \quad &= \quad \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(f''(\theta_i) - f''(B_{t_{i-1}}))\,(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2 \qquad (= T_1)\\
&\quad + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} f''(B_{t_{i-1}})\,((B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2 - (t_i - t_{i-1})) \qquad (= T_2)\\
&\quad + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} f''(B_{t_{i-1}})\,(t_i - t_{i-1}) \qquad (= T_3),
\end{aligned}$$

et on traite chaque terme séparemment. Pour le premier terme, on a par Cauchy-Schwarz

$$\mathbf{E}|T_1| \le \frac{1}{2}\left\{\mathbf{E}\sup_i |f''(\theta_i) - f''(B_{t_{i-1}})|^2\right\}^{1/2} \left\{\mathbf{E}\left[\sum_{i=1}^{n}(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2\right]\right\}^{1/2},$$

qui tend vers 0 puisque la première espérance tend vers 0 grâce au théorème de convergence dominée (on utilise que f'' est bornée et que les trajectoires sont continues) et le second terme tend vers t (c'est précisément la définition de la variation quadratique du mouvement brownien). Pour le second terme, on écrit

$$T_2 := \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \varphi_{i-1}\,(\Delta_i^2 - \delta_i)$$

avec $\varphi_{i-1} := f''(B_{t_{i-1}})$, $\Delta_i := B_{t_i} - B_{t_{i-1}}$ et $\delta_i := t_i - t_{i-1}$. On calcule alors en utilisant que $\Delta_j \perp\!\!\!\perp \mathcal{F}_{t_{j-1}}$ et $\mathbf{E}\Delta_j^2 - \delta_j = 0$

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(T_2^2) \quad &= \quad \frac{1}{2}\sum_{i<j}\mathbf{E}[\varphi_{i-1}\,(\Delta_i^2 - \delta_i)\,\varphi_{j-1}]\,\mathbf{E}[\Delta_j^2 - \delta_j] + \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{E}[\varphi_{i-1}^2\,(\Delta_i^2 - \delta_i)^2]\\
&\le \quad \frac{\|f''\|_\infty^2}{4}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{E}[(\Delta_i^2 - \delta_i)^2]
\end{aligned}$$

qui tend vers 0, comme cela a été démontré dans la preuve de la variation totale du mouvement brownien. Enfin, le dernier terme tend vers l'intégrale annoncée. ◫

Théorème 3.3 (Extension 1: cas non bornée). *Soit B un mouvement brownien réel et soit f une fonction de classe C^2 telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $|f(x)| + |f'(x)| + |f''(x)| \le A\,e^{|x|^a}$, $A > 1$, $a < 2$, alors la formule (3.1) est encore valable.*

Preuve du théorème 3.3. On introduit une fonction impaire $T \in C^2(\mathbb{R})$ telle que $0 \le T' \le 1$, $T(x) = x$ pour $|x| \le 1$, $T''(x) = 0$ pour $|x| \ge 2$, et on définit $f_n(x) := f(n\,T(x/n))$. On a $f_n \in C_b^2(\mathbb{R})$ de sorte que

$$f_n(B_t) = f_n(B_0) + \int_0^t f_n'(B_s)\,dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t f_n''(B_s)\,ds. \tag{3.3}$$

et

$$f_n'(x) = f'(n\,T(x/n))\,T'(x/n), \qquad f_n''(x) = f''(n\,T(x/n))\,T'(x/n)^2 + \frac{1}{n}\,f'(n\,T(x/n))\,T''(x/n).$$

On passe alors terme à terme à la limite $n \to \infty$. Traitons par exemple le deuxième terme. Grâce à la relation d'isométrie et pour n assez grand (on choisit n tel que $2\,n^a \leq n^2/(4t)$) on a

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\left(\int_0^t (f_n'(B_s) - f'(B_s))\, dB_s\right)^2 &= \int_0^t \mathbf{E}(f_n'(B_s) - f'(B_s))^2\, ds \\
&= \int_0^t \int_{\mathbb{R}} (f_n'(x) - f'(x))^2\, \frac{e^{-x^2/(2s)}}{\sqrt{2\,\pi\, s}}\, dxds \\
&\leq 4\int_0^t \int_{\mathbb{R}} e^{2\,|x|^a}\, \mathbf{1}_{|x|\geq n}\, \frac{e^{-x^2/(2s)}}{\sqrt{2\,\pi\, s}}\, dxds \\
&\leq 4\int_0^t \left\{\int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{|\sqrt{s}\,y|\geq n}\, \frac{e^{-y^2/4}}{\sqrt{2\,\pi}} dy\right\} ds \;\to\; 0,
\end{aligned}$$

puisque le terme entre $\{...\}$ est plus petit que $\sqrt{2}$ et tend vers 0 pour tout $s > 0$, et il suffit d'appliquer le théorème de convergence dominée. ◫

Théorème 3.4 (Extension 2: cas dépendant du temps). *Soit B un mouvement brownien réel et soit $f \in C_b^2(\mathbb{R}^2)$. Alors*

$$f(t, B_t) = f(0, B_0) + \int_0^t (\partial_x f)(s, B_s)\, dB_s + \int_0^t (\partial_s f)(s, B_s)\, ds + \frac{1}{2}\int_0^t (\partial_{xx}^2 f)(s, B_s)\, ds.$$

Preuve du théorème 3.4. On écrit

$$f(t, B_t) = f(0, B_0) + \sum_{i=1}^n [f(t_i, B_{t_i}) - f(t_i, B_{t_{i-1}})] + \sum_{i=1}^n [f(t_i, B_{t_{i-1}}) - f(t_{i-1}, B_{t_{i-1}})],$$

et le dernier terme (qui est le terme nouveau) donne une contribution

$$\sum_{i=1}^n (\partial_s f)(\eta_i, B_{t_{i-1}})\,(t_i - t_{i-1}) \;\to\; \int_0^t (\partial_s f)(s, B_s)\, ds$$

lorsque $n \to \infty$. ◫

Théorème 3.5 (Extension 3: cas vectoriel). *Soit $B = (B^1, ..., B^d)$ un mouvement brownien à valeurs $\mathbb{R}^d$ et soit $f \in C_b^2(\mathbb{R}^d)$. Alors*

$$f(B_t) = f(B_0) + \sum_{k=1}^d \int_0^t (\partial_{x_k} f)(B_s)\, dB_s^k + \frac{1}{2}\int_0^t (\Delta f)(B_s)\, ds.$$

Preuve du théorème 3.5. Pour simplifier les notations traitons le cas $d = 2$. On écrit

$$\begin{aligned}
f(B_t) &= f(B_0) + \sum_{i=1}^n [f(B_{t_i}^1, B_{t_i}^2) - f(B_{t_{i-1}}^1, B_{t_i}^2)] + \sum_{i=1}^n [f(B_{t_{i-1}}^1, B_{t_i}^2) - f(B_{t_{i-1}}^1, B_{t_{i-1}}^2)] \\
&= f(B_0) + \sum_{i=1}^n \Big\{(\partial_1 f)(B_{t_{i-1}}^1, B_{t_i}^2)\,(B_{t_i}^1 - B_{t_{i-1}}^1) + (\partial_2 f)(B_{t_{i-1}})\,(B_{t_i}^2 - B_{t_{i-1}}^2)\Big\} \\
&\quad + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \Big\{(\partial_{11}^2 f)(\theta_i^1, B_{t_{i-1}}^2)\,(B_{t_i}^1 - B_{t_{i-1}}^1)^2 + (\partial_{22}^2 f)(B_{t_{i-1}}^1, \theta_i^2)\,(B_{t_i}^1 - B_{t_{i-1}}^1)^2\Big\} \\
&= f(B_0) + \sum_{i=1}^n \Big\{(\partial_1 f)(B_{t_{i-1}})\,(B_{t_i}^1 - B_{t_{i-1}}^1) + (\partial_2 f)(B_{t_{i-1}})\,(B_{t_i}^2 - B_{t_{i-1}}^2)\Big\}
\end{aligned}$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\Big\{(\partial_{11}^2 f)(\theta_i^1, B_{t_{i-1}}^2)\,(B_{t_i}^1 - B_{t_{i-1}}^1)^2 + (\partial_{22}^2 f)(B_{t_{i-1}}^1, \theta_i^2)\,(B_{t_i}^1 - B_{t_{i-1}}^1)^2\Big\}$$
$$+\sum_{i=1}^{n}[(\partial_{12}^2 f)(B_{t_{i-1}}^1, \theta_i^3) - (\partial_{12}^2 f)(B_{t_{i-1}})]\,(B_{t_i}^1 - B_{t_{i-1}}^1)\,(B_{t_i}^2 - B_{t_{i-1}}^2)$$
$$+\sum_{i=1}^{n}(\partial_{12}^2 f)(B_{t_{i-1}})\,(B_{t_i}^1 - B_{t_{i-1}}^1)\,(B_{t_i}^2 - B_{t_{i-1}}^2) \qquad (= T_4)$$

et la seule difficulté nouvelle est de passer à la limite dans le dernier terme (et de voir pourquoi la limite est nulle). Noter que l'avant dernier terme se ramène à un terme du type T_1 dans la preuve du théorème 3.1 en utilisant l'inégalté de Young

$$|(B_{t_i}^1 - B_{t_{i-1}}^1)\,(B_{t_i}^2 - B_{t_{i-1}}^2)| \le \frac{1}{2}\,(B_{t_i}^1 - B_{t_{i-1}}^1)^2 + \frac{1}{2}\,(B_{t_i}^2 - B_{t_{i-1}}^2)^2.$$

Pour estimer le terme T_4, on note $\varphi_{i-1} := (\partial_{12}^2 f)(B_{t_{i-1}})$, $\Delta_{\ell,i} := B_{t_i}^\ell - B_{t_{i-1}}^\ell$, $\Delta_{1+2,i} := (B_{t_i}^1 + B_{t_i}^2)/\sqrt{2} - (B_{t_{i-1}}^1 + B_{t_{i-1}}^2)/\sqrt{2}$ et $\delta_i := t_i - t_{i-1}$, de sorte que l'on a

$$\begin{aligned} T_4 &= \sum_{i=1}^{n}\varphi_{i-1}\Delta_{1,i}\,\Delta_{2,i} = \sum_{i=1}^{n}\varphi_{i-1}\,(2\,\Delta_{1+2,i}^2 - \Delta_{1,i}^2 - \Delta_{2,i}^2) \\ &= 2\sum_{i=1}^{n}\varphi_{i-1}\,(\Delta_{1+2,i}^2 - \delta_i) - \sum_{i=1}^{n}\varphi_{i-1}\,(\Delta_{1,i}^2 - \delta_i) - \sum_{i=1}^{n}\varphi_{i-1}\,(\Delta_{2,i}^2 - \delta_i). \end{aligned}$$

En remarquant que le processus $t \mapsto (B_t^1 + B_t^2)/\sqrt{2}$ est un mouvement brownien (il suffit de constater qu'il vérifie la "caractérisation gaussienne" d'un mouvement brownien) adapté à la filtration $\mathcal{F}^B$, on voit que les trois termes tendent vers 0 dans L^2 (c'est la même estimation que pour le terme T_2 dans la preuve du théorème 3.1). ◫

Remarque 3.6 *Pour des processus X, Y, Z on définit la variation quadratique $\langle X\rangle_T$ par*

$$\langle X\rangle_T = \langle X\rangle \overset{déf}{:=} \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(X_{t_k} - X_{t_{k-1}})^2,$$

si cette limite existe pour toute suite de partitions $0 = t_0 < ... < t_n = T$, et la covariation $\langle Y, Z\rangle_T$

$$\langle Y, Z\rangle_T \overset{déf\ 1}{:=} \frac{1}{2}\,(\langle Y+Z\rangle - \langle Y\rangle - \langle Z\rangle) \overset{déf\ 2}{:=} \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(Y_{t_k} - Y_{t_{k-1}})\,(Z_{t_k} - Z_{t_{k-1}}),$$

si dans la première définition les quantités sont toutes bien définies, ou de manière équivalente, si dans la deuxième définition cette limite existe pour toute suite de partitions $0 = t_0 < ... < t_n = T$.
Ce que l'on vient de démontrer dans le théorème 3.5 c'est que pour deux mouvements brownien B^1 et B^2 indépendants on a

$$\langle B^1, B^2\rangle = 0.$$

3.2 Processus d'Itô.

Définition 3.7 *Soit B un mouvement brownien à valeurs dans $\mathbb{R}^{d_1}$. On appelle processus d'Itô, un processus $(X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^{d_2}$ qui s'écrit sous la forme*

$$X_t := X_0 + \int_0^t \phi_s\,dB_s + \int_0^t \psi_s\,ds, \tag{3.4}$$

avec $X_0 \in \mathbb{R}^{d_2}$ un va $\mathcal{F}_0$-mesurable, $\phi \in L^2(\mathbb{T};\mathcal{F}^B$-Prog) à valeurs dans l'espace des matrices $d_2 \times d_1$ et $\psi \in L^1(\mathbb{T};\mathcal{F}^B$-Prog) à valeurs dans $\mathbb{R}^{d_2}$. Pour être plus explicite, on écrit

$$X_i(t) = X_i(0) + \sum_{j=1}^{d_1} \int_0^t \phi_{ij}(s)\, dB_j(s) + \int_0^t \psi_i(s)\, ds. \tag{3.5}$$

On introduit la notation "infinitésimale" dX du processus d'Ito X par

$$dX_s = \phi_s\, dB_s + \psi_s\, ds,$$

et le crochet $\langle X\rangle$ du processus d'Ito X par

$$\langle X\rangle_t := \int_0^t \phi_s^2\, ds \quad ou \quad d\langle X\rangle_t = \phi_t^2\, dt \quad si\ X\ \ est\ réel, \tag{3.6}$$

$$\langle X\rangle_{ij}(t) := \langle X_i, X_j\rangle_t = \int_0^t \sum_{\ell=1}^{d_1} \phi_{i\ell}(s)\, \phi_{j\ell}(s)\, ds \quad ou \quad d\langle X_i, X_j\rangle_t = \sum_{\ell=1}^{d_1} \phi_{i\ell}(t)\, \phi_{j\ell}(t)\, dt \quad si\ X \in \mathbb{R}^{d_2}. \tag{3.7}$$

Remarque 3.8 *Attention, on prend ici comme définition du crochet les expressions (3.6) et (3.7) et non pas les définitions du crochet introduites dans la remarque 3.6. Il est important de remarquer que ces définitions sont compatibles puisque l'on retrouve $\langle B\rangle_t = t$ et $\langle B^i, B^j\rangle = 0$ si B^i et B^j sont deux mouvements brownien indépendants. On peut démontrer que pour un processus d'Itô général les définitions (3.6) et (3.7) coïncident avec celles de la remarque 3.6. Toutefois, nous ne démontrerons pas ce résultat, et cela ne nous sera pas nécessaire.*

Lemme 3.9 *Soit X un processus d'Itô qui s'écrit*

$$X_t = X_0 + \int_0^t \phi_s\, dB_s + \int_0^t \psi_s\, ds = X_0' + \int_0^t \phi_s'\, dB_s + \int_0^t \psi_s'\, ds,$$

avec $X_0, X_0' \in \mathcal{F}_0$, ϕ, ψ, ϕ', $\psi' \in L^2(Prog)$. Alors $X_0 = X_0'$ p.s., $\phi_s = \phi_s'$ p.s. et $\psi_s = \psi_s'$ p.s.

Preuve du lemme 3.9. Etape 1. En prenant $t = 0$ on a $X_0 = X_0'$ p.s. On définit

$$Z_t := \int_0^t (\psi' - \psi)\, ds = \int_0^t (\phi_s - \phi_s')\, dB_s.$$

Puisque Z est une martingale (c'est une intégrale stochastique!), on a

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(Z_t^2) &= \mathbf{E}\left[\sum_{k=1}^n (Z_{t_k}^2 - Z_{t_{k-1}}^2)\right] \\
&= \sum_{k=1}^n \mathbf{E}\left[Z_{t_k} - Z_{t_{k-1}}\right]^2 \qquad (\text{car } \mathbf{E}(Z_k\, Z_{k-1}) = \mathbf{E}(\mathbf{E}(Z_k|\mathcal{F}_{k-1})\, Z_{k-1}) = \mathbf{E}(Z_{k-1}^2)).
\end{aligned}$$

En prenant maintenant la première expression de Z, on en déduit grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(Z_t^2) &= \mathbf{E}\sum_{k=1}^n \left[\int_{t_{k-1}}^{t_k} \psi(s)\, ds\right]^2 \le \mathbf{E}\sum_{k=1}^n \left[(t_k - t_{k-1}) \int_{t_{k-1}}^{t_k} \psi^2(s)\, ds\right] \\
&= \sup_{1\le k\le n} (t_k - t_{k-1})\, \mathbf{E}\left[\int_0^t \psi^2(s)\, ds\right] \to 0,
\end{aligned}$$

ce qui démontre $Z \equiv 0$.
Etape 2. On a alors d'une part pour toute fonction $\chi \in C^1([0,T])$ telle que $\chi(T) = 0$ par intégration par parties

$$\int_0^T \chi\,(\psi - \psi')\,ds = -\int_0^T \chi'(t)\,\Big(\int_0^t (\psi - \psi')\,ds\Big)\,dt = 0 \;\; p.s.,$$

et en choisissant $\chi_n \to \mathrm{sign}(\psi - \psi')$ on obtient

$$\int_0^T |\psi - \psi'|\,ds = 0,$$

et donc $\psi = \psi'$. Enfin, grâce à la relation d'isométrie on a

$$\mathbf{E}\int_0^T (\phi_s - \phi'_s)^2\,ds = \mathbf{E}\Big(\int_0^T (\phi_s - \phi'_s)\,dB_s\Big)^2 = 0$$

ce qui implique également $\phi = \phi'$ p.s. ◻

Définition 3.10 *Soit X un processus d'Itô de la forme (3.4). Pour toute fonction $\mathcal{F}^B$-progressivement mesurable θ on définit l'intégrale stochastique par rapport au processus X par*

$$\int_0^t \theta_s\,dX_s := \int_0^t \theta_s\,\phi_s\,dB_s + \int_0^t \theta_s\,\psi_s\,ds,$$

dès que $\theta_s\,\phi_s \in L^2$ et $\theta_s\,\psi_s \in L^1$.

Théorème 3.11 (Extension 5: processus d'Itô réel). *Soit X un processus d'Itô réel de la forme (3.4). Pour toute fonction $f \in C_b^2(\mathbb{R})$ on a*

$$\begin{aligned} f(X_t) &= f(X_0) + \int_0^t f'(X_s)\,dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s)\,d\langle X\rangle_s \\ &= f(X_0) + \int_0^t f'(X_s)\,\phi_s\,dB_s + \int_0^t \Big[f'(X_s)\,\psi_s + \frac{1}{2}\,f''(X_s)\,\phi_s^2\Big]\,ds. \end{aligned}$$

Preuve du théorème 3.11. Etape 1. On commence par considérer le cas (indépendant du temps)

$$dX_t = \phi(\omega)\,dB_t + \psi(\omega)\,dt,$$

avec $\phi, \psi \in L^\infty(\mathcal{F}_0)$. On procède comme dans les extensions précédantes, en écrivant

$$\begin{aligned} f(X_t) &= f(X_0) + \sum_{i=1}^n [f(X_{t_i}) - f(X_{t_{i-1}})] \\ &= f(X_0) + \sum_{i=1}^n f'(X_{t_i})\,(X_{t_i} - X_{t_{i-1}}) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n f''(\theta_i)\,(X_{t_i} - X_{t_{i-1}})^2, \end{aligned}$$

avec θ_i dans l'intervalle $(X_{t_{i-1}}, X_{t_i})$. Or, par définition,

$$X_{t_i} - X_{t_{i-1}} = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \phi\,dB_s + \int_{t_{i-1}}^{t_i} \psi\,ds = \phi\,(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}) + \psi\,(t_i - t_{i-1}),$$

ce qui implique d'une part que

$$\sum_{i=1}^n f'(X_{t_i})\,(X_{t_i} - X_{t_{i-1}}) \;\to\; \int_0^t f'(X_s)\,\phi_s\,dB_s + \int_0^t f'(X_s)\,\psi_s\,ds =: \int_0^t f'(X_s)\,dX_s.$$

Cela implique d'autre part que

$$(X_{t_i} - X_{t_{i-1}})^2 \quad = \quad \phi^2\,(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2 + 2\,\phi\,(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})\,\psi\,(t_i - t_{i-1}) + \psi^2\,(t_i - t_{i-1})^2,$$

et on estime le deuxième terme par

$$\begin{aligned} \mathbf{E}|\phi\,(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})\,\psi\,(t_i - t_{i-1})| &= |t_i - t_{i-1}|\,\mathbf{E}|\phi\ \psi|\,\mathbf{E}|B_{t_i} - B_{t_{i-1}}| \\ &\le |t_i - t_{i-1}|^{3/2}(\mathbf{E}\,\phi^2)^{1/2}\,(\mathbf{E}\,\psi^2)^{1/2}, \end{aligned}$$

On voit donc en sommant et en passant à la limite $n \to \infty$ que le deuxième terme et le troisième terme donnent une contribution nulle, alors que le premier terme converge vers le terme habituel (multiplié par ϕ^2). On a donc ainsi démontré la formule d'Itô dans ce cas.

Etape 2. On traite le cas d'une fonction en escalier en itérant la première étape. Enfin dans le cas général $\phi \in L^2(\mathrm{Prog})$, $\psi \in L^1(\mathrm{Prog})$, il existe des suites (ϕ_n) et (ψ_n) de $\mathscr{E}\mathrm{sc}(\mathrm{Prog}) \cap L^\infty$ telles que $\phi_n \to \phi$ dans L^2 et $\psi_n \to \psi$ dans L^1 et telles que

$$f(X_t^n) = f(X_0) + \int_0^t f'(X^n(s))\,\phi_n(s)\,dB_s + \int_0^t \left[f'(X_s^n)\,\psi_n(s) + \frac{1}{2}\,f''(X^n(s))\,\phi_n^2(s)\right]\,ds,$$

où on a défini le processus d'Itô X^n par

$$X_t^n := X_0 + \int_0^t \phi_n(s)\,dB_s + \int_0^t \psi_n(s)\,ds.$$

On conclut en passant à la limite $n \to \infty$. ◫

Remarque 3.12 *On vient d'établir une deuxième règle de calcul concernant le crochet, à savoir que*

$$\langle B, t\rangle = 0.$$

Théorème 3.13 (Extension 6: processus d'Itô vectoriel). *Soient X un processus d'Itô défini par (3.5) et $f \in C^2(\mathbb{R}^{d_2+1})$. Alors on a*

$$f(t, X_t) \quad = \quad f(0, X_0) + \int_0^t \nabla f(s, X_s)\cdot dX_s + \int_0^t (\partial_s f)(s, X_s)\,ds + \frac{1}{2}\int_0^t D^2 f(s, X_s) : d\langle X\rangle_s$$

lorsque
(i) $\phi = (\phi_{ij}) \in L^2(Prog)$, $\psi = (\psi_i) \in L^1(Prog)$ et $f \in C_b^2$;
(ii) $\phi = (\phi_{ij})$, $\psi = (\psi_i) \in \mathscr{E}sc([0,T]; Prog) \cap L^\infty([0,T] \times \Omega)$ et f satisfait pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $|f(x)| + |Df(x)| + |D^2 f(x)| \le A\,e^{|x|^a}$, $A > 1$, $a < 2$;
(iii) "moralement" dès que $Df(X)\,\phi \in L^2$ et $Df(X)\,\psi$, $D^2 f(X)\,\phi^{\otimes 2} \in L^1$.

Preuve du théorème 3.13. On procède en plusieurs étapes.

Etape 1. Pour tout $\phi, \psi \in \mathscr{E}\mathrm{sc}([0,T]; \mathrm{Prog}) \cap L^\infty([0,T] \times \Omega)$ il existe $\kappa > 0$ tel que le processus d'Itô X associé satisfait

$$\forall\, t \in [0,T] \qquad \mathbf{E}(\exp(\kappa\, X_t^2) \le C < \infty. \tag{3.8}$$

Pour simplifier on ne traite que le cas de la dimension $d_1 = 1$ et que le terme (plus délicat) $(\phi \bullet B)_t$. En effet, on a

$$(\phi \bullet B_t)^2 = \left(\sum_{k=1}^n \phi_{k-1}\,(B_{t_k} - B_{t_{k-1}})\right)^2 \le C_n\,\|\phi\|_\infty^2 \sum_{k=1}^n (B_{t_k} - B_{t_{k-1}})^2,$$

de sorte qu'avec $\delta_k := t_k - t_{k-1} \le T$ et $\kappa > 0$ assez petit tel que $A < 1/(2T)$

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\Big[\exp\Big(\varepsilon\,(\phi \bullet B_t)^2\Big)\Big] &\le \mathbf{E}\Big[\exp\Big(A \sum_{k=1}^{n} (B_{t_k} - B_{t_{k-1}})^2\Big)\Big] \le \prod_{k=1}^{n} \mathbf{E}\Big[\exp\Big(A\,(B_{t_k} - B_{t_{k-1}})^2\Big)\Big] \\ &\le \prod_{k=1}^{n} \mathbf{E}\Big[\exp\Big(A\, B^2_{\delta_k}\Big)\Big] = \prod_{k=1}^{n} \int_{\mathbb{R}} e^{A\,x^2 - \frac{x^2}{2\,\delta_k}} \,\frac{dx}{\sqrt{2\,\pi\,\delta_k}} \le \prod_{k=1}^{n} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{4}} \,\frac{dx}{\sqrt{2\,\pi}} = 2^{n/2}.\end{aligned}$$

Cette (très mauvaise) borne permet de justifier tous les calculs à venir.

Etape 2. On commence par considérer le cas indépedant du temps

$$dX_t = \phi(\omega) dB_t + \psi(\omega)\, dt = \left(\sum_{j=1}^{d_1} \phi_{ij}\, dB_{jt} + \psi_i(\omega)\, dt\right)_{1\le i\le d_2},$$

avec $\phi_{ij}, \psi_i \in L^\infty(\mathcal{F}_0)$. Pour la suite de temps $t_k := k\,t/n$, on écrit

$$\begin{aligned} f(X_t) &= f(X_0) + \sum_{k=1}^{n} [f(X_{t_k}) - f(X_{t_{k-1}})] \\ &= f(X_0) + \sum_{k=1}^{n} \nabla f(X_{t_{k-1}})\,(X_{t_k} - X_{t_{k-1}}) + \sum_{k=1}^{n} \int_0^1 (1-s) D^2 f(\theta_s)\,(X_{t_k} - X_{t_{k-1}})^{\otimes 2}\, ds, \end{aligned}$$

avec $\theta_s := s\,X_{t_k} + (1-s)\,X_{t_{k-1}}$. Or, par définition,

$$X_{t_k} - X_{t_{k-1}} = \phi\,(B_{t_k} - B_{t_{k-1}}) + \psi\,(t_k - t_{k-1}) = \Big(\sum_{j=1}^{d_1} \phi_{ij}\,(B_{jt_k} - B_{jt_{k-1}}) + \psi_i\,(t_k - t_{k-1}\Big)_{1\le i\le d_2},$$

ce qui implique d'une part que (en somment l'indice i de 1 à d_2 et l'indice j de 1 à d_1)

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{n} \nabla f(X_{t_{k-1}})\,(X_{t_k} - X_{t_{k-1}}) = \sum_{i,j} \sum_{k=1}^{n} \partial_i f(X_{t_{k-1}}) \Big(\phi_{ij}\,(B_{jt_k} - B_{jt_{k-1}}) + \psi_i\,(t_k - t_{k-1})\Big) \\ &\to \sum_{i,j} \int_0^t \partial_i f(X_s) \Big(\phi_{ij}\, dB_{js} + \psi_i\, ds\Big) =: \int_0^t \nabla f(X_s) \cdot dX_s. \end{aligned}$$

Cela implique d'autre part que (avec convention de sommation des indices répétés)

$$\begin{aligned} (X_{t_k} - X_{t_{k-1}})^{\otimes 2}_{ij} &= \phi_{ip}\,\phi_{jq}\,(B_{pt_k} - B_{pt_{k-1}})\,(B_{qt_k} - B_{qt_{k-1}}) + \phi_{ip}\,(B_{pt_k} - B_{pt_{k-1}})\,\psi_j\ (t_k - t_{k-1}) \\ &\quad + \phi_{jp}\,(B_{qt_k} - B_{qt_{k-1}})\,\psi_i\ (t_k - t_{k-1}) + \psi_i\,\psi_j\,(t_k - t_{k-1})^2, \end{aligned}$$

où tous les termes, sauf éventuellement le premier, sont en $\mathcal{O}(|t_k - t_{k-1}|^{3/2})$. Pour le premier terme, on a

$$\phi_{ip}\,\phi_{jq} \sum_{k=1}^{n} (B_{pt_k} - B_{pt_{k-1}})\,(B_{qt_k} - B_{qt_{k-1}}) \to \phi_{ip}\,\phi_{jq}\,\langle B_p, B_q\rangle = \phi_{ip}\,\phi_{jq}\,\delta_{pq}\,t.$$

En conclusion, on a démontré que la limite ci-dessous existe et sa valeur est

$$\langle X\rangle^{\otimes 2}_{ij}(t) := \lim_{k\to\infty} (X_{t_k} - X_{t_{k-1}})^{\otimes 2}_{ij} = \sum_{p=1}^{d_2} \int_0^t \phi_{ip}\,\phi_{jp}\, ds.$$

Etape 3. Pour établir (i), on procède comme dans la deuxième étape du théorème 3.11.

Etape 4. Pour établir (ii), on reprend la preuve du théorème 3.3. Avec les notations introduites dans cette preuve, le point clef est d'estimer le terme suivant (où pour simplifier on ne considère que le cas $\psi \equiv 0$, on utilise la borne de l'étape 1 et on choisit n assez grand de sorte que $2\,n^a \le \varepsilon\, n^2/2$)

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\left(\int_0^t (f_n'(X_s) - f'(X_s))\, dX_s\right)^2 &= \mathbf{E}\left(\int_0^t (f_n'(X_s) - f'(X_s))^2\, \phi_s^2\, ds\right) \\
&\le \|\phi\|_\infty^2 \int_0^T \mathbf{E}\big[A^2\, e^{2\,|X|^a}\, \mathbf{1}_{|X|\ge n}\big]\, ds \\
&\le A^2\, \|\phi\|_\infty^2 \int_0^t \mathbf{E}\big[\big(e^{\varepsilon\,|X|^2/2}\, \mathbf{1}_{|X|\ge n}\big)\, \big(e^{\varepsilon\,|X|^2/2}\, e^{-\varepsilon\, n^2/2}\, \mathbf{1}_{|X|\ge n}\big)\big]\, ds \\
&\le A^2\, \|\phi\|_\infty^2 \int_0^t \mathbf{E}\big[e^{\varepsilon\,|X|^2}\big]\, ds\, e^{-\varepsilon\, n^2/2} \;\to\; 0,
\end{aligned}$$

lorsque $n \to \infty$. $\square$

Remarque 3.14 *Ce que l'on a démontré est que l'on a la règle de calcul*

$$\langle X + Y\rangle = \langle X\rangle + 2\,\langle X, Y\rangle + \langle Y\rangle.$$

pour les processus d'Itô X et Y.

4 Martingales remarquables

4.1 Représentation d'une martingale brownienne

Nous avons vu qu'une intégrale stochastique browienne était une martingale, nous allons maintenant montrer la réciproque.

Théorème 4.1 *Soit B un mouvement brownien et M une $\mathcal{F}^B$-martingale bornée dans L^2. Alors il existe un (unique) processus $\phi \in L^2(B)$ tel que*

$$M_t = \mathbf{E}(M_0) + \int_0^t \phi_s\, dB_s. \tag{4.1}$$

On a va commencer par démontrer deux résultats intermédiaires.

Lemme 4.2 *Soit B un mouvement brownien, et soit $T \in \mathbb{T}$ fixé. L'espace V engendré par les variables aléatoires*

$$\exp\left(i \sum_{k=1}^n \lambda_k\, (B_{t_k} - B_{t_{k-1}})\right)$$

pour $0 = t_0 < ... < t_n = T$ et $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$ est dense dans $L^2_{\mathbb{C}}(\Omega, \mathcal{F}^B_T)$.

Preuve du Lemme 4.2. L'espace V est égal à l'espace vectoriel engendré par les fonctions de la forme $\exp\,(i \sum_{k=1}^n \mu_k\, B_{t_k})$ qui est dense dans l'espace vectoriel engendré par les fonctions de la forme $\phi(B_{t_1}, ..., B_{t_n})$ (c'est un théorème de densité dans $C_b(\mathbb{R}^{nd})$), qui est lui-même dense dans l'espace $L^2_{\mathbb{C}}(\Omega, \mathcal{F}^B_T)$ (c'est une propriété de classe monotone liée à la définition de $\mathcal{F}^B_T$). $\square$

Lemme 4.3 *Soient B un mouvement brownien, $T \in \mathbb{T}$ fixé et X une va $\mathcal{F}^B_T$-mesurable et bornée dans L^2. Alors il existe un (unique) processus $\phi \in L^2(B)$ tel que*

$$X = \mathbf{E}(X) + \int_0^T \phi_s\, dB_s.$$

Preuve du Lemme 4.3. Notons $\mathcal{H}$ le sous-espace véctoriel des va $M_T \in L^2(\Omega; \mathcal{F}_T)$ vérifiant (4.1) pour $t = T$. Nous allons montrer que $\mathcal{H}$ est fermé, $\mathcal{H}$ contient un sev dense dans $L^2(\Omega; \mathcal{F}_T)$, donc $\mathcal{H} = L^2(\Omega; \mathcal{F}_T)$. Puis nous obtiendrons (4.1) en prenant l'espérance conditionnelle par rapport à $\mathcal{F}_t^B$.

Première étape: unicité. Remarquons que si ϕ et ψ sont deux processus progressifs vérifiant (4.1) alors

$$\mathbf{E}\left[\int_0^t (\phi_s - \phi_s)^2\, ds\right] = \mathbf{E}\left[\int_0^T (\phi_s - \phi_s)\, dB_s\right]^2 = 0,$$

d'où l'unicité de la représentation (4.1).

Deuxième étape: $\mathcal{H}$ est fermé. De la même manière, si (Z^n) est une suite de $\mathcal{H}$ convergente dans $L^2(\Omega; \mathcal{F}_T)$ vers une limite Z et si (ϕ^n) est la suite de processus de $L^2(B)$ associés, alors

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\left[\int_0^t (\phi_s^m - \phi_s^n)^2\, ds\right] &= \mathbf{E}\left[\int_0^T (\phi_s^m - \phi_s^n)\, dB_s\right]^2 \\
&= \mathbf{E}\left[(Z^m - \mathbf{E}(Z^m)) - (Z^n - \mathbf{E}(Z^n))\right]^2 \\
&\leq 2\,\|Z^n - Z^m\|_{L^2} \to 0,
\end{aligned}$$

et donc (ϕ^n) est une suite de Cauchy. On en déduit que (ϕ^n) converge vers une limite ϕ qui est un processus de $L^2(B)$, et que ϕ et $M_T := Z$ satisfont (4.1). Donc $\mathcal{H}$ est fermé.

Troisième étape: $\mathcal{H}$ est dense dans $L^2(\Omega, \mathcal{F}_T)$. Soient $0 = t_0 < ... < t_n = T$, $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$ et

$$M_t := \exp[i\,(\phi \bullet B)_t], \qquad \phi_s := \sum_{k=1}^n \lambda_k\, \mathbf{1}_{]t_{k-1},t_k]}(s).$$

En posant $f(t, X) = \exp\left(i\,X + \frac{1}{2}\int_0^t \phi_s^2\, ds\right)$ la formule d'Itô implique

$$\begin{aligned}
M_T\, \exp\left(\frac{1}{2}\int_0^T \phi_s^2\, ds\right) &= f(T, (\phi \bullet B)_T) \\
&= f(0,0) + \int_0^T (\partial_x f)(s, X_s)\, \phi_s\, dB_s + \int_0^T (\partial_s f)(s, X_s)\, ds + \int_0^T (\partial_{xx}^2 f)(s, X_s)\, d\langle X\rangle_s \\
&= 1 + i\int_0^T f(s, X_s)\, \phi_s\, dB_s + \int_0^T f(s, X_s)\left(\frac{1}{2}\,\phi_s^2\, ds + i^2\, d\langle X\rangle_s\right) \\
&= 1 + i\int_0^T f(s, X_s)\, \phi_s\, dB_s,
\end{aligned}$$

ce qui montre que l'espace vectoriel $\mathcal{H}_0$ engendré par les variables aléatoires

$$\exp\left(i\sum_{k=1}^n \lambda_k\,(B_{t_k} - B_{t_{k-1}})\right) = M_T$$

est inclus dans $\mathcal{H}$.

Preuve du Théorème 4.1. D'après le lemme 4.3 appliqué à $Z = M_T$ il existe un unique $\phi \in L^2(B)$ tel que

$$M_T = \mathbf{E}(M_T) + \int_0^T \phi_s\, dB_s.$$

On en déduit immédiatement

$$M_t = \mathbf{E}(M_T|\mathcal{F}_t) = \mathbf{E}(M_0) + \int_0^t \phi_s\, dB_s$$

pour tout $t \in [0, T]$. ◻

Remarque 4.4 *voir [LeG2, p. 80]*

4.2 Martingale quadratique

Théorème 4.5 *Pour tout ϕ, $\psi \in L^2(\mathbb{T}, Prog)$, le processus M_t défini par*

$$M_t := X_t\, Y_t - \int_0^t \phi_s\, \psi_s\, ds, \quad X_t := \int_0^t \phi_s\, dB_s, \quad Y_t := \int_0^t \psi_s\, dB_s, \tag{4.2}$$

est une martingale continue centrée. En particulier,

$$\left(\int_0^t \phi_s\, dB_s\right)^2 - \int_0^t \phi_s^2\, ds \quad \textit{est une martingale continue centrée.} \tag{4.3}$$

Preuve du Théorème 4.5. Soit $\phi \in L^2(\text{Prog})$ et ϕ^n une suite de processus élémentaires de $\mathscr{E}\text{sc}(\text{Prog}) \cap L^\infty$ telle que $\phi^n \to \phi$ dans L^2. La formule d'Itô s'applique et donne

$$(\phi^n \bullet B)_t^2 = \int_0^t 2\, (\phi^n \bullet B)_s\, \phi_s^n\, dB_s + \frac{1}{2} \int_0^t 2\, (\phi_s^n)^2\, ds,$$

ce qui implique (4.3) pour le processus associé à ϕ^n. Il n'y a alors aucune difficulté à passer à la limite $n \to \infty$ et obtenir (4.3). Pour deux processus $\phi, \psi \in L^2(\text{Prog})$ on utilise l'identité de polarisation

$$M_t = \frac{1}{4}\left(((\phi+\psi) \bullet B)_t - \int_0^t (\phi+\psi)^2\, ds\right) - \frac{1}{4}\left(((\phi-\psi) \bullet B)_t - \int_0^t (\phi-\psi)^2\, ds\right)$$

et deux fois (4.3) pour en déduire (4.2). ◫

Exercice 4.6 *Etablir la formule d'intégration par partie: pour deux processus d'Itô X et Y, on a*

$$X_t\, Y_t = X_0\, Y_0 + \int_0^t X_s\, dY_s + \int_0^t Y_s\, dX_s + \int_0^t d\langle X, Y\rangle_s.$$

En déduire l'identité suivante:

$$\mathbf{E}\left[\left(\int_\tau^t \phi_u dB_u\right)\left(\int_\tau^s \psi_u dB_u\right)\Big|\mathcal{F}_\tau^B\right] = \mathbf{E}\left[\int_\tau^{s\wedge t} \phi_u\, \psi_u\, du \Big| \mathcal{F}_\tau^B\right].$$

Correction. La première identité découle de la formule d'Itô appliquée au vecteur (X_t, Y_t) et à la fonction $f(x,y) = x\,y$. Pour établir la seconde identité on écrit à l'aide de la première identité

$$X_t\, Y_t = X_\tau\, Y_\tau + \int_\tau^t X_u\, dY_u + \int_\tau^t Y_u\, dX_u + \int_\tau^t d\langle X, Y\rangle_u,$$

que l'on applique aux fonctions ϕ_u et $\psi_u\, \mathbf{1}_{[\tau,s]}(u)$, de sorte que

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\left[\left(\int_\tau^t \phi_u dB_u\right)\left(\int_\tau^s \psi_u dB_u\right)\Big|\mathcal{F}_\tau^B\right] &= \mathbf{E}\left[(X_t - X_\tau)(Y_t - Y_\tau)\Big|\mathcal{F}_\tau^B\right] \\
&= \mathbf{E}\left[X_t\, Y_t\Big|\mathcal{F}_\tau^B\right] - X_\tau\, Y_\tau \\
&= \mathbf{E}\left[\int_\tau^t d\langle X, Y\rangle_s\Big|\mathcal{F}_\tau^B\right] = \mathbf{E}\left[\int_\tau^{s\wedge t} \phi_u\, \psi_u\, du\Big|\mathcal{F}_\tau^B\right].
\end{aligned}$$

◫

4.3 Théorème de Girsanov

Proposition 4.7 (transformation de Girsanov). *Pour tout $\phi \in L^2(\mathbb{T}, Prog)$ tel que*

$$\mathbf{E}\left(e^{k\int_0^T \phi_s^2\, ds}\right) < \infty, \quad k > 1, \tag{4.4}$$

le processus (positif)

$$Z_t := \exp\left(\int_0^t \phi_s\, dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t \phi_s^2\, ds\right) \tag{4.5}$$

est une martingale continue. En particulier, on a

$$\forall\, t \in [0, T] \qquad \mathbf{E}[Z_t] = 1. \tag{4.6}$$

Plus préciémment si $k = 6$ alors Z est de carré intégrable et

$$\sup_{t\in[0,T]} \mathbf{E}(Z_t^2) \le \left(\mathbf{E}\left[e^{6\int_0^T \phi_s^2\, ds}\right]\right)^{1/2}. \tag{4.7}$$

Preuve de la Proposition 4.7. Etape 1. Supposons $\phi \in \mathscr{E}\mathrm{sc}(\mathrm{Prog}) \cap L^\infty$. La formule d'Itô appliquée à

$$X_t := \int_0^t \phi_s\, dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t \phi_s^2\, ds \quad \text{et} \quad f(X) = e^X$$

implique que

$$Z_t = e^{X_t} = 1 + \int_0^t e^{X_s}\, \phi_s\, dB_s, \tag{4.8}$$

et donc que Z_t est une martingale continue.
Etape 2. On suppose $\phi \in L^\infty(\mathrm{Prog})$. La formule d'Itô (4.8) implique

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(Z_t^2) &= 1 + 2\mathbf{E}\left(\int_0^t e^{X_s}\, \phi_s\, dB_s\right) + \mathbf{E}\left(\int_0^t Z_s\, \phi_s\, dB_s\right)^2 \\ &\le 1 + \|\phi\|_\infty^2 \int_0^t \mathbf{E}\left(Z_s^2\right)\, ds, \end{aligned}$$

et le lemme de Gronwall implique la "borne a priori"

$$\mathbf{E}(Z_t^2) \le \exp(\|\phi\|_\infty^2\, t).$$

Etape 3. On peut faire mieux. L'inégalité de Cauchy-Schwarz et (4.6) impliquent

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[Z^2] &= \mathbf{E}\left[\exp\left(2\int_0^t \phi_s\, dB_s - 4\int_0^t \phi_s^2\, ds\right)\exp\left(3\int_0^t \phi_s^2\, ds\right)\right] \\ &\le \mathbf{E}\left[\exp\left(\int_0^t 4\phi_s\, dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t (4\phi_s)^2\, ds\right)\right]^{1/2} \mathbf{E}\left[\exp\left(6\int_0^t \phi_s^2\, ds\right)\right]^{1/2} \\ &\le \mathbf{E}\left[\exp\left(6\int_0^t \phi_s^2\, ds\right)\right]^{1/2}, \end{aligned}$$

ce qui donne la borne (4.7). Le cas $k \in (1, 6]$ se traite de la même manière en remplaçant la borne sur Z^2 par une borne sur $|Z|^p$ avec $p > 1$ (et éventuellement p proche de 1).
Etape 3. Pour un processus plus général $\phi \in L^2(\mathrm{Prog})$ tel que (4.4) (avec disons $k = 6$), on l'approche par la suite $(\phi_n)_n$ construite de sorte que $\int_0^T \phi_n^2\, du \le \int_0^T \phi^2\, du$ par inégalité de Jensen et donc la suite $Z_{\phi_n}^2$ est uniformément bornée dans L^2 par la bonne quantitée . Comme par ailleurs, et à extraction d'une sous-suite, $Z_{\phi_n} \to Z_\phi$ p.s. on en déduit que $Z_{\phi_n} \to Z_\phi$ dans L^1 et Z_ϕ est encore une martingale (est bornée dans L^2, et la convergence étant uniforme par l'inégalité maximale de Doob, c'est un processus continu). ◻

Remarque 4.8 *On retrouve que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ le processus*

$$Z_{a+i\theta}(t) := e^{(a+i\theta)\,B_t - \frac{(a+i\theta)^2}{2}\,t}$$

est une martingale.

Théorème 4.9 *Soit $\phi \in L^2(Prog)$ telle que pour $C_\phi \in \mathbb{R}_+$*

$$\int_0^T \phi_s^2\,ds \leq C_\phi \quad p.s.$$

D'après les propriétés de martingale positive de $Z = (Z_t)_{t\in[0,T]}$ défini par (4.5), et en particulier $\mathbf{E}(Z_T) = 1$, cela nous permet de définir la probabilité $\mathbf{Q}$ sur $(\Omega, \mathcal{F}_T^B)$ par $d\mathbf{Q} := Z_T\,d\mathbf{P}$, c'est-à-dire, par

$$\forall\, A \in \mathcal{F}_T^B \qquad \mathbf{Q}(A) := \mathbf{E}^{\mathbf{P}}(Z_T\,\mathbf{1}_A).$$

Alors le processus $(X_t)_{t\in[0,T]}$ défini par

$$X_t := B_t - f_t, \qquad f_t := \int_0^t \phi_s\,ds$$

est un $\mathcal{F}_t^B$-mouvement brownien sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}_T^B, \mathbf{Q})$.

Preuve du Théorème 4.9. *Première étape.* D'après la Proposition 4.7, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, le processus

$$Z_\psi(t) := \exp\left(\int_0^t \psi_u\,dB_u - \frac{1}{2}\int_0^t \psi_u^2\,du\right), \qquad \psi := \phi + i\,\theta, \tag{4.9}$$

est une $(\mathcal{F}_t, \mathbf{P})$ martingale. En effet, cela provient de la borne "a priori"

$$\mathbf{E}[|Z_\psi|^2] = \mathbf{E}[|Z_\phi|^2\,e^{\theta^2\,t/2}] \leq C_{\phi,\theta,T}$$

que l'on déduit de (4.7) et du procédé d'approximation introduit dans la preuve de la Proposition 4.7.

Deuxième étape. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $0 \leq s < t \leq T$ et $Y \in \mathcal{F}_s^B$ on a

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[e^{i\,\theta\,X_t}\,Y] &= \int_\Omega e^{i\,\theta\,(B_t - f_t)}\,Y\,Z_\phi(T)\,d\mathbf{P} \\
&= \int_\Omega e^{i\,\theta\,(B_t - f_t)}\,Y\,Z_\phi(t)\,d\mathbf{P} \qquad (Z_\phi \text{ est une martingale}) \\
&= \int_\Omega Z_{\phi+i\,\theta}(t)\,Y\,d\mathbf{P}\,e^{-\frac{\theta^2}{2}\,t} \\
&= \int_\Omega Z_{\phi+i\,\theta}(s)\,Y\,d\mathbf{P}\,e^{-\frac{\theta^2}{2}\,t} \qquad (Z_{\phi+i\theta}(t) \text{ est une martingale}) \\
&= \int_\Omega e^{i\,\theta\,(B_s - f_s)}\,Y\,Z_\phi(s)\,d\mathbf{P}\,e^{-\frac{\theta^2}{2}\,(t-s)} \\
&= \int_\Omega e^{i\,\theta\,(B_s - f_s)}\,Y\,Z_\phi(T)\,d\mathbf{P}\,e^{-\frac{\theta^2}{2}\,(t-s)} \qquad (Z_\phi \text{ est une martingale}) \\
&= \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[e^{i\,\theta\,X_s}\,e^{-\frac{\theta^2}{2}\,(t-s)}\,Y].
\end{aligned}$$

On vient de démontrer que

$$\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[e^{i\,\theta\,X_t + \frac{\theta^2}{2}\,t}|\mathcal{F}_s] = e^{i\,\theta\,X_s + \frac{\theta^2}{2}\,s}$$

et donc

$$\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[e^{i\,\theta\,(X_t - X_s)\,t}|\mathcal{F}_s] = e^{\frac{\theta^2}{2}\,(s-t)}.$$

On conclut par la caractérisation martingale du mouvement brownien. ◻

5 Equations différentielles stochastiques et processus de diffusion.

5.1 Equations différentielles stochastiques

Soient deux fonctions $\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, un mouvement brownien B et une variable aléatoire X_0 indépendante de B, ces processus étant définis sur le même espace $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$. L'équation

$$dX(t) = b(X(t))\, dt + \sigma(X(t))\, dB(t), \qquad X(0) = X_0, \tag{5.1}$$

est appelée une équation différentielle stochastique de dérive b et de coefficient de diffusion σ. Une solution de l'équation (5.1) est appelée processus de diffusion ou simplement diffusion.

Définition 5.1 *On appelle solution forte de l'équation différentielle stochastique (5.1) tout processus aléatoire $X = (X_t)_{t\geq 0}$ défini sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ tel que*
(i) X est adapté à la filtration $\mathcal{F}$, avec $\mathcal{F}_t := \sigma(X_0, (B_u)_{0\leq u\leq t})$;
(ii) $u \mapsto b(X_u), \sigma(X_u) \in L^2([0,t]; \mathcal{F}_t\text{-Prog})$ pour tout t et

$$\mathbf{P} - p.s. \quad \forall\, t \in [0,\infty) \qquad X_t = X_0 + \int_0^t b(X_s)\, ds + \int_0^t \sigma(X_s)\, dB_s. \tag{5.2}$$

Théorème 5.2 *Soient B un mouvement brownien, $X_0 \in L^2$ et b, σ des fonctions Lipschitziennes, i.e.*

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R}^d \qquad |b(y) - b(x)| + |\sigma(y) - \sigma(x)| \leq L.$$

Alors l'équation (5.1) admet une unique solution $X \in L^2(Prog)$. En particulier, les trajectoires de X sont continues (p.s.).

Preuve du Théorème 5.2. On définit

$$f : L^2([0,T]; \mathrm{Prog}) \to L^2([0,T]; \mathrm{Prog})$$

l'application qui à $X \in L^2([0,T]; \mathrm{Prog})$ associe $f(X) = Y$ le processus défini par

$$Y_t := X_0 + \int_0^t b(X_s)\, ds + \int_0^t \sigma(X_s)\, dB_s. \int_0^t b(X_s)\, ds + \int_0^t \sigma(X_s)\, dB_s.$$

C'est un processus $\mathcal{F}_t$-progressif qui est dans L^2 puisque pour tout $t \in [0,T]$

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(Y_t^2) &\leq 3\left\{\mathbf{E}(X_0^2) + \mathbf{E}\left(\int_0^t b(X_s)\, ds\right)^2 + \mathbf{E}\left(\int_0^t \sigma(X_s)\, dB_s\right)^2\right\} \\
&\leq 3\left\{\mathbf{E}(X_0^2) + t\int_0^t \mathbf{E}\left(b(X_s)\right)^2\, ds + \mathbf{E}\int_0^t \sigma(X_s)^2\, ds\right\} \\
&\leq 3\left\{\mathbf{E}(X_0^2) + T\int_0^T \left(L^2\left(\mathbf{E}|X_s|^2 + b(0)^2\right)\right)\, ds + \int_0^T \left(L^2\left(\mathbf{E}|X_s|^2 + \sigma(0)^2\right)\right)\, ds\right\} < \infty.
\end{aligned}$$

De plus, étant donnés deux processus X_1, $X_2 \in L^2(\mathrm{Prog})$ on a

$$\begin{aligned}
\int_0^T \mathbf{E}(|Y_2 - Y_1|_t^2)\, dt &\leq 2\int_0^T \left\{\mathbf{E}\left(\int_0^t (b(X_{2s}) - b(X_{1s}))\, ds\right)^2 + \mathbf{E}\left(\int_0^t (\sigma(X_{2s}) - \sigma(X_{1s}))\, dB_s\right)^2\right\} dt \\
&\leq 2\int_0^T \left\{\mathbf{E}\left(L^2\, t\int_0^t |X_{2s} - X_{1s}|^2\, ds\right) + \mathbf{E}\left(L^2\int_0^t |X_{2s} - X_{1s}|^2\, ds\right)\right\} dt \\
&\leq (T^2 + 2\,T)\, L^2\int_0^T \mathbf{E}\left(|X_{2s} - X_{1s}|^2\right)\, ds,
\end{aligned}$$

de sorte que l'application f est contractante (Lipschitzienne de constante de Lipschitz $\alpha < 1$) si T est assez petit. Le théorème du point fixe de Banach implique l'existence et l'unicité d'un point fixe $f(X) = X$, $X \in L^2([0,T];\mathrm{Prog})$, c'est-à-dire, d'une solution à l'équation (5.1) sur $[0,T]$. En itérant l'argument, on obtient une solution à l'équation (5.1) sur $[0,T]$, avec $T > 0$ arbitraire (ment grand). $\square$

Théorème 5.3 *La loi $\mu_t := \mathcal{L}(X_t)$ du processus de diffusion X_t est solution de l'équation (de Kolmogorov)*

$$\begin{aligned}\partial_t \mu_t = L^*\mu_t \quad &:= \quad \frac{1}{2} D^2 : (\sigma^T \sigma\, \mu_t) - \nabla \cdot (b\, \mu_t) \\ &:= \quad \frac{1}{2} \sum_{ijk=1}^d \partial^2_{ij}(\sigma_{ik}\, \sigma_{jk}\, \mu_t) - \sum_{i=1}^d \partial_i (b_i\, \mu_t)\end{aligned}$$

au sens des distributions $\mathcal{D}'([0,T) \times \mathbb{R}^d)$.

Preuve du Théorème 5.3. C'est juste la formule d'Itô. En effet, pour tout $\varphi \in C^2_c([0,T) \times \mathbb{R}^d)$, on a

$$\begin{aligned}0 \quad &= \quad \mathbf{E}(\varphi(T, X_T)) \\ &= \quad \mathbf{E}\Big(\varphi(0, X_0) + \int_0^t (\partial_t \varphi)(t, X_t)\, dt + \int_0^t \nabla\varphi(X_t) \cdot \sigma(X_t)\, dB_t \\ &\qquad + \int_0^t \nabla\varphi(X_t) \cdot b(X_t)\, dt + \frac{1}{2} \int_0^t D^2\varphi(X_t) : \langle \sigma(X) \rangle_t\, dt\Big) \\ &= \quad \langle \mu_0, \varphi(0,.)\rangle + \int_0^t \langle \mu_t, (\partial_t\varphi)(t,.)\rangle\, dt + \int_0^t \langle \mu_t, \nabla\varphi \cdot b\rangle\, dt + \frac{1}{2}\int_0^t \langle \mu_t, D^2\varphi : \sigma^T\sigma\rangle\, dt \\ &= \quad \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(0,.)\, \mu_0(dx) + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \Big\{ \partial_t \varphi(t,x) + \nabla\varphi \cdot b + \frac{1}{2} D^2\varphi : \sigma^T\sigma \rangle \Big\} (t,x)\, \mu_t(dx).\end{aligned}$$

$\square$

Bibliographie.

[Ble] N. Bouleau, *Processus stochastiques et applications*, chapitres 6 à 8, Hermann 2000

[CM] F. Comets, T. Meyre, *Calcul stochastique et modèles de diffuions*, chapitres 3 à 6, Dunod 2006

[Dos] H. Doss, *Processus stochastiques continus*, chapitre 3, cours manuscrit de M1, UPD

[Lac] J. Lacroix, *Processus stationnaires et prévision*, cours de M1 téléchargeable, Laboratoire de Probabilité, UPMC, 2004

[LeG2] J.-F. Legall, *Mouvement brownien et calcul stochastique*, chapitres 5 & 6, cours de M2R téléchargeable, Laboratoire de Probabilité, UPMC, 1996

[Par] E. Pardoux, *Processus de Markov et applications*, chapitre 9 - Mathématiques Financières, Dunod 2007