ENSEIGNANT-CHERCHEUR EN LUTTE CONTRE LA L. R. U.

CHAPITRE 3 - PROCESSUS DE POISSON

1 Processus de comptage et processus de Poisson.

1.1 Définition

Définition 1.1 *Un processus de comptage est un processus $N = (N_t)_{t \ge 0}$ croissant, càd (et donc càdlàg) à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, tel que $N_0 = 0$ et qui satisfait (suivant les auteurs) éventuellement l'une ou toutes les propriétés suivantes*
(i) p.s. les sauts sont de taille 1;
(ii) p.s. N_t est à valeurs entières ($N_t < \infty$);
(iii) p.s. $N_t \to +\infty$.
On dira que N est un processus de comptage au sens large si on ne suppose pas (i)–(iii) et que N est un processus de comptage au sens strict si on suppose (i)–(iii).

Grâce au lemme élémentaire suivant, on peut définir un processus de comptage comme-ci dessus ou de manière équivalente par les temps $(T_n)_{n\ge1}$ de sauts successifs ou par les temps $(X_n)_{n\ge1}$ de durée des inter-sauts.

Lemme 1.2 *Dans ce lemme les fonctions/suites sont déterministes (il n'y a pas d'aléa).*
1) Etant donnée une fonction $N_t : [0,\infty) \to \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ croissante, càdlàg et telle que $N_0 = 0$, on définit la suite de sauts successifs

$$T_n := \inf\{t;\ N_t \ge n\}.$$

2) Etant donnée une suite croissante (T_n) de $\mathbb{N} \to \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ on définit la fonction croissante de "comptage" (N_t) et la suite (X_n) de temps inter-sauts par

$$N_t := card\{n \in \mathbb{N}^*;\ T_n \le t\} = \sum_{n\ge1} \mathbf{1}_{T_n \le t}, \qquad X_n := T_n - T_{n-1} \ge 0.$$

3) Etant donnée une suite (X_n) de temps inter-sauts à valeurs dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$, on définit une suite croissante (T_n) à valeurs dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ par

$$T_n := X_1 + ... + X_n.$$

De plus, on a les équivalences suivantes:
(i) les sauts de N_t sont de taille 1 si, et seulement si, T_n est strictement croissante et donc si, et seulement si, $X_n > 0$ pour tout $n \ge 0$;
(ii) N_t est à valeurs entières ($N_t < \infty$) si, et seulement si, $X_1 + ... + X_n = T_n \to +\infty$;
(iii) $N_t \to +\infty$ si, et seulement si, $X_1 + ... + X_n = T_n < \infty$ pour tout $n \ge 1$;
(iv) pour tout $t \ge 0$ et $k \in \mathbb{N}$, on a

$$N_t \ge k \text{ si, et seulement si, } T_k \le t,$$
$$N_t = k \text{ si, et seulement si, } t \in [T_k, T_{k+1}[,$$

et $N_{T_k} = k$ si $[T_k, T_{k+1}[\neq \emptyset$. En particulier, dans le cas d'un processus de comptage avec sauts de taille $+1$, on a $T_n = \inf\{t;\ N_t = n\}$.

Définition 1.3 *Etant donnée* (T_n) *une suite croissante de va positives, on appelle compteur ou processus de comptage associé, le processus* $(N_t)_{t\geq 0}$ *tel que* $N_t(\omega)$ *est défini à l'aide du Lemme 1.2 1).*
Inversement, étant donné un processus de comptage (N_t) *on appelle processus ponctuel (de* $\mathbb{R}_+$*) associé la suite* (T_n) *de va telle que* $T_n(\omega)$ *défini à l'aide du Lemme 1.2 2).*

Remarque 1.4 *- Si* (N_t) *est un processus de comptage au sens large et* (T_n) *est le processus ponctuel associé, alors la relation*

$$\forall\, t \geq 0 \qquad \{T_n \leq t\} = \{N_t \geq n\} \in \mathcal{F}_t^N$$

montre que chaque T_n *est un tda pour la filtration* $(\mathcal{F}_t^N)$*.*

On définit la loi exponentielle comme loi sur $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{R}_+$) de paramètre $\lambda > 0$ par

$$f_\lambda(t) = \lambda\, e^{-\lambda\, t}\, \mathbf{1}_{t>0}.$$

On note $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ si X est une var de loi f_λ. La loi d'une var X étant caractérisée par sa fonction de répartiopn F_X, une var X suit une loi $\mathrm{Exp}(\lambda)$ si, et seulement, si

$$1 - F_X(t) := \mathbf{P}(X > t) = \mathbf{E}(\mathbf{1}_{X>t}) = \int_0^\infty \mathbf{1}_{x>t}\, f_\lambda(x)\, dx = \int_t^\infty \lambda\, e^{-\lambda\, x}\, dx = e^{-\lambda\, t}.$$

En particulier, on a $X \sim f_1(t)$ si, et seulement si, on a $X/\lambda \sim f_\lambda$. Enfin, on calcule $\mathbf{E}X = 1/\lambda$, $\mathbf{E}X^2 = 2/\lambda^2$, $Var\, X = 1/\lambda^2$.

Définition 1.5 *On appelle processus* ponctuel *de Poisson de paramètre/d'intensité* $\lambda > 0$ *une suite (de temps)* $(T_n)_{n\geq 0}$ *avec* $T_0 = 0$ *et telle que* la suite $(X_n)_{n\geq 0}$ *des temps inter-sauts, définie par* $X_n := T_n - T_{n-1}$ *pour tout* $n \geq 0$*, forme une suite de variables indépendantes de même loi exponentielle* $\mathrm{Exp}(\lambda)$*.*

Définition 1.6 *On appelle processus de Poisson de paramètre/d'intensité* $\lambda > 0$ *un PAIScàd(làg)* $(N_t)_{t\geq 0}$ *issu de* 0 *dont le taux de transition* μ_t *suit une loi de Poisson de paramètre* $\lambda\, t$*,* $\mu_t \sim \mathcal{P}(\lambda t)$*:*

$$\mathbf{P}(N_t = n) = \mu_t(n) := e^{-\lambda\, t}\, \frac{(\lambda\, t)^n}{n!}.$$

Le résultat fondamental est le suivant.

Théorème 1.7 *Soit* (N_t) *un processus de comptage (au sens large) et soit* (T_n) *le processus ponctuel associé (ou inversement, soit* (T_n) *une suite croissante de va positives et soit* (N_t) *le compteur associé). Il y a équivalence entre*
(1) (N_t) *est un processus de Poisson;*
(2) (T_n) *est un processus ponctuel de Poisson.*
De plus, dans les deux cas, N_t *est intégrable et l'intensité est donné par* $\lambda := \mathbf{E}(N_1) \in (0, \infty)$*.*

Le théorème est une conséquence des différentes implications établis dans les propositions suivants.

Lemme 1.8 *Soit* (T_n) *un processus ponctuel de Poisson de paramètre/d'intensité* $\lambda \in (0, \infty)$ *et* N_t *le compteur associé. Soit* φ *une fonction borélienne positive sur* $\mathbb{R}_+^n$*. Alors*

$$\mathbf{E}\left(\varphi(T_1, ..., T_n)\, \mathbf{1}_{\{N_t=n\}}\right) = \lambda^n\, e^{-\lambda\, t} \int_{0<s_1<...<s_n} \varphi(s_1, ..., s_n)\, ds_1 \dots ds_n.$$

Preuve du lemme 1.8. En remarquant que

$$\{N_t = n\} = \{T_n \leq t < T_{n+1})\}$$

on calcule

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\left(\varphi(T_1,...,T_n)\,\mathbf{1}_{\{N_t=n\}}\right) &= \mathbf{E}\left(\varphi(X_1,...,X_1+...+X_n)\,\mathbf{1}_{\{X_1+...+X_n\le t\}}\,\mathbf{1}_{\{t<X_1+...+X_n\}}\right)\\
&= \lambda^{n+1}\int...\int \varphi(u_1,...,u_1+...+u_n)\,e^{-\lambda\,(u_1+...+u_{n+1})}\\
&\qquad \mathbf{1}_{\{u_1+...+u_n\le t\}}\,\mathbf{1}_{\{t<u_1+...+u_{n+1}\}}\,du_1...du_{n+1}\\
&= \lambda^{n+1}\int...\int \varphi(s_1,...,s_n)\,e^{-\lambda\,s_{n+1}}\,\mathbf{1}_{\{0<s_1<...<s_n<t\}}\,\mathbf{1}_{\{t<s_{n+1}\}}\,ds_1...ds_{n+1}\\
&= \lambda^n\,e^{-\lambda\,t}\int_{0<s_1<...<s_n<t}\varphi(s_1,...,s_n)\,ds_1\,...\,ds_n,
\end{aligned}$$

où on a effectué le changement de variable $s_1 = u_1$, ..., $s_{n+1} = u_1 + ... + u_{n+1}$. ◻

Proposition 1.9 *Le compteur d'un processus ponctuel de Poisson est un processus de Poisson.*

Preuve de la proposition 1.9. Calculons la loi du vecteur N_{t_0}, $N_{t_1} - N_{t_0}$, ..., $N_{t_k} - N_{t_{k-1}}$ pour $0 < t_0 < ... < t_k$. Pour simplifier, on fait le calcul dans le cas $n = 1$, le cas général étant analogue. Soient donc $0 < t_0 < t_1$ et $m, n \in \mathbb{N}$. On remarque que

$$\begin{aligned}
\{N_{t_0} = m,\, N_{t_1} - N_{t_0} = n\} &= \{N_{t_0} = m,\, N_{t_1} = m+n\}\\
&= \{T_m \le t_0 < T_{m+1},\, T_{m+n} \le t_1,\, N_{t_1} = m+n\} \quad \text{si } n \ge 1,\\
&= \{T_m \le t_0,\, N_{t_1} = m\} \quad \text{si } n = 0.
\end{aligned}$$

Dans le cas $n \ge 1$, on a, grâce au lemme 1.8,

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}(\{N_{t_0} = m,\, N_{t_1} - N_{t_0} = n\}) =\\
&= \lambda^{m+n}\,e^{-\lambda\,t_1}\int \mathbf{1}_{0<s_1<..<s_m\le t_0}\,ds_1..\,ds_m \int \mathbf{1}_{t_0<s_{m+1}<..<s_{m+n}\le t_1}\,ds_{m+1}..\,ds_{m+n}\\
&= \lambda^m\,e^{-\lambda\,t_0}\frac{t_0^m}{m!}\,\lambda^n\,e^{-\lambda\,(t_1-t_0)}\frac{(t_1-t_0)^n}{n!}. \qquad (1.1)
\end{aligned}$$

Dans le cas $n = 0$, il n'y a pas de "deuxième intégrale" en $ds_{m+1}...ds_{m+n}$ dans l'expression ci-dessus, et on arrive à la même conclusion (1.1). En sommant en n, on trouve que

$$\mathbf{P}(N_{t_0} = m) = \lambda^m\,e^{-\lambda\,t_0}\frac{t_0^m}{m!},$$

ce qui prouve que N_t suit une loi de Poisson. En sommant en m, on trouve que

$$\mathbf{P}(N_{t_1} - N_{t_0} = n) = \lambda^n\,e^{-\lambda\,(t_1-t_0)}\frac{(t_1-t_0)^n}{n!} = \mathbf{P}(N_{t_1-t_0} = n),$$

ce qui prouve que N_t est à accroissement stationnaire. Enfin, en revenant à (1.1), on a

$$\mathbf{P}(\{N_{t_0} = m,\, N_{t_1} - N_{t_0} = n\}) = \mathbf{P}(N_{t_0} = m)\,\mathbf{P}(N_{t_1} - N_{t_0} = n),$$

ce qui prouve que N_{t_0} et $N_{t_1} - N_{t_0}$ sont indépendants.
Dans le cas général, on considère $0 < t_1 < ... < t_k$ et $m_1, ..., m_k \in \mathbb{N}$. On a

$$\begin{aligned}
\{N_{t_1} = m_1, \dots, N_{t_k} - N_{t_{k-1}} = m_k\} &= \{N_{t_1} = n_1 := m_1, \dots, N_{t_k} = n_k := m_1 + ... + m_k\}\\
&= \{T_{n_1} \le t_1 < T_{n_1+1}, \dots, T_{n_k} \le t_k,\, N_{t_k} = n_k\}.
\end{aligned}$$

Grâce au lemme 1.8, on a

$$\mathbf{P}(\{N_{t_1} = m_1, \dots, N_{t_k} - N_{t_{k-1}} = m_k\}) = \lambda^{n_k}\,e^{-\lambda\,t_k}\prod_{i=1}^k A_i$$

avec pour tout $i = 1, ..., k$

$$A_i := \int ... \int \mathbf{1}_{t_{i-1} < s_{n_{i-1}+1} < ... < s_{n_i} \le t_i} \, ds_{n_{i-1}+1} ... ds_{n_i} \quad \text{si} \quad m_i := n_i - n_{i-1} \ge 1,$$

la convention $t_0 = 0$, et $A_i = 1$ si $m_i = 0$. Donc, on a $A_i = (t_i - t_{i-1})^{m_i}/m_i!$, et on conclut à

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\{N_{t_1} = m_1, ..., N_{t_k} - N_{t_{k-1}} = m_k\}) &= \prod_{i=1}^{k} e^{-\lambda\,(t_i - t_{i-1})} \frac{[\lambda\,(t_i - t_{i-1})]^{m_i}}{m_i!} \\ &= \prod_{i=1}^{k} \mathbf{P}(N_{t_i} - N_{t_{i-1}} = m_i) \end{aligned}$$

ce qui prouve l'indépendance des accroissements. □

Proposition 1.10 *Le processus ponctuel d'un processus de Poisson est un processus ponctuel de Poisson.*

Preuve de la proposition 1.14. Soit (N_t) un processus de Poisson et soit $(\tilde{N}_t)$ le compteur d'un processus ponctuel de Poisson. D'après la proposition 1.9, on sait que $(\tilde{N}_t)$ est également un processus de Poisson. En particulier, (N_t) suit la même loi que $(\tilde{N}_t)$. Comme pour toute famille de réels $t_1 < ... < t_k$ et d'entiers $n_1 \le ... \le n_k$ on a

$$\begin{aligned} \{N_{t_1} \ge n_1, ..., N_{t_k} \ge n_k\} &= \{T_{n_1} \le t_1, ..., T_{n_k} \le t_k\}, \\ \{\tilde{N}_{t_1} \ge n_1, ..., \tilde{N}_{t_k} \ge n_k\} &= \{\tilde{T}_{n_1} \le t_1, ..., \tilde{T}_{n_k} \le t_k\}, \end{aligned}$$

on en déduit

$$\mathbf{P}(\{T_{n_1} \le t_1, ..., T_{n_k} \le t_k\}) = \mathbf{P}(\{T_{n_1} \le t_1, ..., T_{n_k} \le t_k\}).$$

Cela prouve bien que (T_n) et $(\tilde{T}_n)$ ont même loi (finie dimensionnelle), donc également que la suite des inter-sauts (X_n) est de même loi (finie dimensionnelle) que $(\tilde{X}_n)$, ce qui permet de conclure. □

Remarque 1.11 *Insistons sur le fait que puisque la loi de N_t est la loi de Poisson, on a pour tout $t \ge 0$*

$$\mathbf{P}(N_t < \infty) = \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{P}(N_t = i) = e^{-\lambda\,t} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(\lambda\,t)^k}{k!} = 1,$$

ce qui prouve que le nombre de sauts est p.s. fini sur un intervalle de temps fini $[0, t]$. De même, puisque la loi des inter-sauts X_k est la loi exponentielle, on a $\mathbf{P}(X_k > 0) = 1$ pour tout k, et donc p.s. les sauts de N_t sont de taille 1. Remarquons également que pour tout $M \in N$ fini, on a

$$\mathbf{P}(N_t \le M) = e^{-\lambda\,t} \sum_{k=0}^{M} \frac{(\lambda\,t)^k}{k!} \;\to\; 0 \quad \textit{lorsque} \quad t \to \infty,$$

ce qui prouve bien, puisque (N_t) est croissante, que $N_t \to \infty$ p.s. On vient de prouver que (N_t) est un processus de comptage au sens strict. Enfin, on a

$$\mathbf{E}(N_t) = \sum_{k=0}^{\infty} k\,\mathbf{P}(N_t = k) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda\,t} \frac{(\lambda\,t)^k}{(k-1)!} = \lambda\,t,$$

ce qui prouve bien que N_t est intégrable et que l'intensité est déterminée par $\lambda := \mathbf{E}(N_1)$. Cette quantité correspond au nombre moyen d'événements qui se produisent sur un intervalle de temps de longueur unité, puisque $\mathbf{E}(N_{t+1} - N_t) = \mathbf{E}(N_1)$.

1.2 Variantes du théorème 1.7

Théorème 1.12 *Soit (N_t) un processus de comptage (au sens large). Il y a équivalence entre*
(1) (N_t) est un processus de Poisson;
(3) (N_t) est un PAIS et un processus de comptage au sens strict;
(3') (N_t) est un PAIS, non identiquement nul, intégrable ($N_t \in \mathcal{L}^1$ pour tout $t \geq 0$) et les sauts de N_t sont de taille $+1$;
(4) (N_t) est un PAIS dont le taux de transition satisfait $p_h(0) \not\equiv 1$, $p_h(\{2, 3, ...\}) = o(h)$.
De plus, dans tous les cas, N_t est intégrable, l'intensité de N_t (comme processus de Poisson) est donné par $\lambda := \mathbf{E}(N_1) \in (0, \infty)$ et $\mathbf{P}(N_t = 1) = \lambda\, t + o(t)$.

Lemme 1.13 *Soit φ une fonction mesurable, continue à droite en 0^+, $\varphi(0) = 1$, $0 \leq \varphi \leq 1$ et telle que*

$$\varphi(s + t) = \varphi(s)\, \varphi(t) \qquad \forall\, s, t \geq 0. \tag{1.2}$$

Alors il existe $\lambda \in [0, \infty)$ tel que $\varphi(t) = e^{-\lambda\, t}$ pour tout $t \geq 0$. Si de plus $\varphi \not\equiv 1$, alors $\lambda > 0$.

Preuve du lemme 1.13. En notant $a := \varphi(1)$ l'équation fonctionnelle (1.2) implique immédiatement que $\varphi(t) = a^t$ pour tout $t \in \mathbb{Q}_+^*$.
Comme φ est mesurable positive, l'équation fonctionnelle (1.2) implique que

$$\varphi(u) = \int_{\mathbb{R}} \Big\{\varphi(u - s)\, e^{-(u-s)}\, \mathbf{1}_{u-s\geq 0}\Big\}\ \big\{\varphi(s)\, e^{-s}\, \mathbf{1}_{s\geq 0}\big\}\, ds\ e^u \qquad \forall\, u > 0,$$

et donc que φ est une fonction continue sur $(0, \infty)$ comme convolution de deux fonctions de $L^1 \cap L^\infty(0, \infty)$. On en déduit que $\varphi(t) = a^t$ pour tout $t > 0$.
Comme de plus elle est continue à droite en 0^+ et $\varphi(0) = 1$, on a $1 = \varphi(0^+) = a^0$, ce qui implique $a > 0$.
Comme enfin $\varphi \leq 1$, cela implique $a \leq 1$, et $\varphi \not\equiv 1$ implique $a < 1$. Il existe donc bien $\lambda \in (0, \infty)$ tel que $a = e^{-\lambda}$. ◫

Proposition 1.14 *Un processus $\mathcal{L}^1$ et non identiquement nul qui est un processus de comptage de sauts égaux à 1 et un PAIS est un processus de Poisson.*

Preuve de la proposition 1.14. On définit $\varphi(t) := \mathbf{P}(N_t = 0)$. Le caractère PAIS implique

$$\varphi(t + s) = \mathbf{P}(N_{t+s} - N_t = 0, N_t = 0) = \mathbf{P}(N_{t+s} - N_t = 0)\, \mathbf{P}(N_t = 0) = \varphi(s)\, \varphi(t) \qquad \forall\, t,\ s \geq 0.$$

Or le processus $t \mapsto N_t$ étant càdlàg et croissant presque sûrement, on a $N_t \searrow N_0 = 0$ p.s., ce qui implique

$$\lim_{t \searrow 0} \varphi(t) = \lim_{t \to 0^+} P(N_t = 0) = P\left(\bigcup_{t>0} \{N_t = 0\}\right) = P\left(\{N_0 = 0\}\right) = 1 = \varphi(0).$$

De plus, comme $N \not\equiv 0$ on n'a pas $\mathbf{P}(N_t = 0) \equiv 1$, et donc $\varphi \not\equiv 1$. Le lemme 1.13 impliqu'il existe $\lambda \in (0, \infty)$ tel que $\mathbf{P}(N_t = 0) = e^{-\lambda\, t}$ pour tout $t \geq 0$.
On définit le temps de 1er saut

$$X_1 := \inf\{u > 0;\ N_u = 1\}.$$

C'est un tda et

$$\mathbf{P}(X_1 > t) = \mathbf{P}(N_t = 0) = \varphi(t) = e^{-\lambda\, t},$$

de sorte que X_1 suit une loi exponentielle. De plus, grâce à la propriété de Markov forte, le processus $N_{t+X_1} - N_{X_1}$ est un PAIS de même taux de transition que (N_t) et indépendant de la tribu $\mathcal{F}_{X_1}$. Par récurrence, on définit les processus $(N^k_t)_{t\geq 0, k\geq 0}$ et les tda $(X_k)_{k\geq 0}$ par $N^0 = N$, $X_0 = 0$, puis

$$X_k := \inf\{u > 0;\ N^{k-1}_u = 1\}, \quad N^k_t := N^{k-1}_{t+X_k} - N_{X_k} = N_{t+X_1+..+X_k} - N_{X_1+..+X_k},$$

et par récurrence on montre que N^k est indépendant de $\mathcal{F}_{X_1}, ..., \mathcal{F}_{X_{k-1}}$, donc les (X_k) sont indépendants, et également $\mathcal{L}(X_k) = \mathcal{L}(X_1) = \text{Exp}(\lambda)$ pour tout $k \geq 1$. Cela montre que (N_t) est un processus de comptage associé à des temps inter-sauts indépendants et de même loi $\text{Exp}(\lambda)$, c'est donc un processus de Poisson. $\square$

Bibliographie.

[Bge] Philippe Bougerol, *Processus de sauts et files d'attente*, chapitre 2 - Processus de Poisson & chapitre 5 - Processus markovien de sauts, cours de M1 téléchargeable, Laboratoire de Probabilité, UPMC, 2001

[Ble] Nicolas Bouleau, *Processus stochastiques et applications*, chapitre 3 - Processus de sauts markoviens et processus ponctuels, Hermann 2000

[Jac] J. Jacob, *Chaînes de Markov, Processus de Poisson et Applications*, chapitres 2 - Processus de Markov de saut pur, 3 - Processus de Poisson & 4 - Processus de renouvellement, cours de M2R téléchargeable, Laboratoire de Probabilité, UPMC

[Dos] Halim Doss, *Processus stochastiques continus*, chapitre 3 - Processus ponctuels de Poisson, cours manuscrit de M1, UPD

[Dur1] Rick Durrett, *Probability: theory and examples*, chapitre 2, paragraphe 6 - Poisson convergence, Duxbury advanced series 2005

[Dur2] Rick Durrett, *Essentials of Stochastic Processes*, chapitre 3 - Poisson process, chapitre 4 - continuous-time Markov chain, Springer

[FF] D. Foata, A. Fuchs, *Processus stochastiques*, chapitres 3 - Processus de Poisson, 4 - Applications des processus de Poisson & 9 - problèmes de Ruine, Dunod 1998

[Lac] J. Lacroix, *Chaînes de Markov et processus de Poisson*, chapitres 3 - Processus de Poisson et de renouvellement, cours 2001-2002 de M2R téléchargeable, Laboratoire de Probabilité, UPMC,

[Par] Etienne Pardoux, *Processus de Markov et applications*, chapitres 6 - Le processus de Poisson & 7 Processus markovien de sauts, Dunod 2007