Université Paris-Dauphine **2008-2009**
M1 MMD, cours de Processus Continus

Examen du Vendredi 4 Septembre, 14h30-16h30
Aucun document ni calculatrice n'est autorisé
Le barème n'est donné qu'à titre indicatif

Exercice 1 *(4 points)*

Soit (B_t) un mouvement Brownien standard. Montrer que les processus suivants sont des $(\mathcal{F}_t^B)$-martingales
a) - $(B_t)_{t\geq 0}$;
b) - $(B_t^2 - t)_{t\geq 0}$;
b) - $(\exp(\lambda\, B_t - \lambda^2\, t/2))_{t\geq 0}$, où λ est un réel quelconque.

Exercice 2 *(6 points)*

Soient (X_t) et (Y_t) deux processus d'Itô réels et $\mathcal{L}^2$.
a) - Rappeler la définition d'un processus d'Itô à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, $d \geq 1$, et énoncer la formule d'Itô pour une fonction $F : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ et un tel processus.
b) - Etablir la formule d'intégration par partie:

$$X_t\, Y_t = X_0\, Y_0 + \int_0^t X_s\, dY_s + \int_0^t Y_s\, dX_s + \int_0^t d\langle X, Y\rangle_s.$$

c) - Montrer que le processus M_t défini par

$$M_t := X_t\, Y_t - \int_0^t \phi_s\, \psi_s\, ds, \quad X_t := \int_0^t \phi_s\, dB_s, \quad Y_t := \int_0^t \psi_s\, dB_s, \tag{0.1}$$

est une $\mathcal{F}^B$-martingale continue centrée pour tout $\phi, \psi \in \mathcal{L}^2(\mathcal{F}^B\text{-Prog})$.
d) - Avec les notations de la question précédente, montrer que pour $t \geq s \geq 0$

$$\mathbf{E}(X_t\, X_s) = \int_0^s \mathbf{E}(\phi_u^2)\, du.$$

Exercice 3 *(5 points)*

Pour tout $t \geq 0$, on définit la variable aléatoire :

$$Y_t = \int_0^t e^{-s} dB_s$$

a) - Rappeler la définition d'un processus Gaussien.
b) - Montrer qu'une limite dans $\mathcal{L}^2(\Omega)$ d'une suite de variables aléatoires Gaussiennes est encore une va Gaussienne.
c) - Montrer que $(Y_t)_{t\geq 0}$ est un processus gaussien.
d) - Calculer son espérance et sa covariance.
e) - Montrer que (Y_t) est une martingale de carré intégrable et que la famille $\big(\mathbf{E}[Y_t^2]\big)_{t\geq 0}$ est bornée. En déduire que (Y_t) converge p.s. et dans L^2 vers une variable aléatoire Y. Quelle est la loi de Y?

Exercice 4 *(5 points)*

Soient $(Y_n)_{n\geq 1}$ et $(T_n)_{n\geq 1}$ deux suites indépendantes de variables aléatoires réelles. On suppose que les variables Y_n sont indépendantes et identiquement distribuées de loi ν, de fonction caractéristique φ, et que $(T_n)_{n\geq 1}$ est un processus ponctuel de Poisson sur $\mathbb{R}_+$, de paramétre $\lambda > 0$. On définit, pour tout $t > 0$,

$$X_t = \sum_{n\geq 1} Y_n \mathbf{1}_{\{T_n \leq t\}}$$

On pose $X_0 = 0$ et $T_0 = 0$.

a) - Expliciter X_t sur $\{T_n \leq t < T_{n+1}\}$, pour tous $t \geq 0$ et $n \in \mathbb{N}$.

b) - Calculer la fonction caractéristique de X_t pour tout $t > 0$.