Université Paris-Dauphine **2009-2010**
M1 MMD, Processus Continus Approfondis

Examen du Mardi 1 Juin, 9h30 - 12h30
Aucun document ni calculatrice n'est autorisé
Le barème n'est donné qu'à titre indicatif

Exercice 1 *(PAIScàd - 4/5 points)*

a) - Rappeler la définition d'un PAI, d'un PAS et d'un processus "continu à droite".

b) - Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ un PAI réel tel que $X_t \in L^2$ pour tout $t \geq 0$. Montrer que $Y_t := X_t - \mathbf{E}(X_t)$ est une $\mathcal{F}_t^X$-martingale et que $Z_t := Y_t^2 - \mathbf{E}(Y_t^2)$ est une $\mathcal{F}_t^X$-martingale.

c) - Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ un PAIScàd réel tel que $X_t \in L^2$ pour tout $t \geq 0$. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\mathbf{E}(X_t - X_0) = \lambda\, t$ pour tout $t \geq 0$ (Ind. On pourra commencer par démontrer cette identité pour $t \in \mathbb{Q}^+$). Montrer également qu'il existe $\sigma \geq 0$ tel que $\mathrm{var}(X_t - X_0) = \sigma\, t$. En déduire qu'il existe α_i et β_i (que l'on explicitera en fonction de X_0 et X_1) tels que

$$X_t - (\alpha_0 + \alpha_1\, t), \quad X_t^2 - (\beta_0 + \beta_1\, t + \beta_2\, t^2) \quad \text{sont des } \mathcal{F}_t^X\text{-martingales.}$$

d) - Rappeler la définition de la propriété de Markov et de la propriété de Markov homogène pour un processus $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$. Soit $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ un PAIScàd réel. Montrer que pour tout $t \geq s \geq 0$ et tout $\phi \in L^\infty(\mathbb{R})$ on a

$$\mathbf{E}(\phi(X_t)|\mathcal{F}_s^X) = \mathbf{E}(\phi(X_t)|X_s).$$

(Ind. On pourra commencer par considérer des fonctions ϕ particulières ...). En déduire qu'un PAIScàd vérifie la propriété de Markov homogène et expliciter le taux de transition de Markov (intervenant dans la définition d'un processus de Markov) en fonction du taux de transition de Lévy (associé à un PAIS).

Exercice 2 *(Loi forte des grands nombres - 4/5 points)*

Soit $B = B_t$ un mouvement brownien réel standard. On définit $X_s := s\, B_{1/s}$, $s > 0$, $X_0 = 0$.

a) - Montrer que la loi de X_s est identique à celle de B_s pour tout $s > 0$. Montrer que $X_s \to 0$ lorsque $s \to 0$ en loi et en probabilité. Peut-on en déduire que $X_s \to 0$ p.s. lorsque $s \to 0$?

b) - Enoncer précisément la loi forte des grands nombres. Montrer que B_n/n converge p.s. vers une limite (que l'on déterminera) lorsque $n \in \mathbb{N}$, $n \to +\infty$.

c) - On introduit la suite de va

$$\xi_n := \sup_{n<t\leq n+1} |B_t - B_n|.$$

Montrer que les (ξ_n) forment une suite de va iid.

d) - Montrer que

$$\mathbf{E}(\xi_1) = \int_0^\infty \mathbf{P}(\xi_1 \geq \varepsilon)\, d\varepsilon \quad \text{et} \quad \mathbf{P}(\xi_1 \geq \varepsilon) \leq 2\, P(|B_1| \geq \varepsilon).$$

En déduire que $\xi_1 \in L^1$, que p.s. $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \xi_i$ converge lorsque $n \to \infty$ vers une limite que l'on déterminera et enfin que

$$p.s. \qquad \frac{\xi_n}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

e) Montrer que

$$p.s. \qquad \frac{B_t}{t} \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

et que X_s est un mouvement Brownien.

Exercice 3 *(Intégrale de Wiener - 4/5 points)*

a) - Rappeler la définition d'un processus réel Gaussien. Comment "caractériser" un processus Gaussien?

b) - Montrer qu'une limite dans $\mathcal{L}^2(\Omega)$ d'une suite de variables aléatoires Gaussiennes est encore une va Gaussienne.

Etant donnés un mouvement brownien réel standard (B_t) et une fonction déterministe $f \in \mathcal{L}^2(0,T)$, on définit

$$X_t := \int_0^t f(u)\,dB_u = \int_0^T f(u)\,\mathbf{1}_{[0,t]}(u)\,dB_u, \qquad 0 \le t \le T.$$

On appelle intégrale de Wiener le terme le plus à droite et processus de Wiener le processus X_t ainsi défini.

c) - Montrer qu'un processus de Wiener est un processus centré, Gaussien et un PAI.

d) - Pour tout $0 \le s \le t$, exprimer $X_t + X_s$ comme une intégrale de Wiener et calculer $\mathbf{E}((X_t + X_s)^2)$ en fonction de f. En déduire que

$$\mathbf{E}(X_t\,X_s) = \int_0^s f^2(u)\,du.$$

e) - Caractériser (en justifiant) le processus

$$Z_t := \int_0^{\sqrt{t}} \sqrt{2\,u}\,dB_u.$$

Exercice 4 *(Théorème d'arrêt)*

Soit B_t un mouvement brownien réel standard. Pour $a \in \mathbb{R}^*$ on définit $T_a := \inf\{t > 0;\ B_t = a\}$ et pour $a < 0 < b$ on définit $T := T_a \wedge T_b = \min(T_a, T_b) = \inf\{t > 0;\ B_t \notin]a, b[\}$.

a) - Enoncer précisément le théorème d'arrêt pour une martingale à temps continu.

b) - Montrer que pour tout $t \in (0, \infty)$ on a $\mathbf{E}(B_{T\wedge t}) = 0$. En déduire que $a\,\mathbf{P}(T_a < T_b) + b\,(1 - \mathbf{P}(T_a < T_b)) = 0$ puis exprimer $\mathbf{P}(T_a < T_b)$ en fonction de a et b.

c) - Montrer que pour tout $t \in (0, \infty)$ on a $\mathbf{E}(T \wedge t) = \mathbf{E}(B^2_{T\wedge t})$. En déduire que $\mathbf{E}(T) = |a|\,b$.

Exercice 5 *(Variation quadratique d'un processus d'Itô)*

Dans tout cet exercice $B = B_t$ désigne un mouvement brownien réel standard sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, X_0 désigne une variable aléatoire réelle indépendante de B, ϕ désigne un processus réel tel que $\phi \in \mathcal{L}^4([0,T], \mathcal{F}_t\text{-Prog})$, et X désigne le processus d'Itô associé

$$X_t := \int_0^t \phi_s\,dB_s + X_0.$$

Le but du problème est de calculer la variation quadratique du processus X.

Partie A.

1) Montrer que si $f \in C_b^2(\mathbb{R};\mathbb{R})$ alors

$$\mathbf{E}(f(X_t)) = \mathbf{E}(f(X_0)) + \frac{1}{2}\int_0^t \mathbf{E}(f''(X_s)\,\phi_s^2)\,ds. \tag{0.1}$$

2) En supposant que (0.1) est encore vraie pour $f(x) = x^4$ (et donc que $X_t \in L^4$ pour tout $t \geq 0$), en déduire que

$$\mathbf{E}(X_t^4) \leq \left(\mathbf{E}(X_0^4) + c_1 \int_0^t \mathbf{E}(\phi_s^4)\,ds\right) e^{c_2\,t} \tag{0.2}$$

pour deux constantes $c_i \geq 0$.

3) Pour quel processus (0.1) est vraie avec $f(x) = x^4$? Démontrer que (0.2) est vraie dans le cas général $\phi \in \mathcal{L}^4(\mathbb{R}_+, \mathcal{F}_t\text{-Prog})$, et donc en particulier $X_t \in \mathcal{L}^4$.

Partie B.

1) Montrer que pour tout $T \geq 0$

$$X_T^2 = X_0^2 + 2\int_0^T X_s\,\phi_s\,dB_s + \int_0^T \phi_s^2\,ds. \tag{0.3}$$

2) Soit une partition $\pi^n = (t_j^n)$, $0 = t_0^n < t_1^n < ... < t_n^n = T$, de $[0,T]$. On définit

$$M_t^n := \sum_{i=1}^n X_{t_{i-1}^n}\,(X_{t_i^n \wedge t} - X_{t_{i-1}^n \wedge t})$$

Montrer que

$$M_T^n = \int_0^T \psi_s^n\,dB_s$$

pour une certaine fonction ψ_s^n que l'on explicitera. A quel espace appartient ψ_s^n?

3) On supposera désormais que $\|\pi^n\| := \sup_{1\leq i\leq n} |t_i^n - t_{i-1}^n| \to 0$ lorsque $n \to \infty$. Montrer alors que $\psi_s^n \to X_s\,\phi_s$ dans $\mathcal{L}^2([0,T], \mathcal{F}_t\text{-Prog})$ lorsque $n \to \infty$, et en déduire que

$$M_T^n \to \int_0^T X_s\,\phi_s\,dB_s, \tag{0.4}$$

lorsque $n \to \infty$. En quel sens a lieu cette convergence?

4) Montrer d'autre part que pour tout $1 \leq j \leq n$

$$X_{t_j^n}^2 - 2\,M_{t_j^n}^n = (X_{t_j^n} - X_{t_{j-1}^n})^2 + X_{t_{j-1}^n}^2 - 2\,M_{t_{j-1}^n}^n,$$

puis que

$$X_T^2 - 2\,M_T^n = \sum_{j=1}^n (X_{t_j^n} - X_{t_{j-1}^n})^2 + X_0^2.$$

5) Montrer enfin que

$$\mathrm{var}_2(X) := \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^n (X_{t_i^n} - X_{t_{i-1}^n})^2 = \int_0^T \phi_s^2\,ds.$$

En quel sens a lieu cette convergence?