Université Paris-Dauphine **2009-2010**
M1 MMD, Processus Continus Approfondis

Examen du Mercredi 1er Septembre, 14h30 - 17h30
Aucun document ni calculatrice n'est autorisé

Exercice 1

Soit (B_t) un mouvement Brownien standard. Montrer que les processus suivants sont des $(\mathcal{F}_t^B)$-martingales
a) - $(B_t)_{t\geq 0}$;
b) - $(B_t^2 - t)_{t\geq 0}$;
b) - $(\exp(\lambda\, B_t - \lambda^2\, t/2))_{t\geq 0}$, où λ est un réel quelconque.

Exercice 2

a) - Rappeler la définition d'un PAI, d'un PAS et d'un processus "continu à droite".
b) - Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ un PAIScàd réel tel que $X_t \in L^2$ pour tout $t \geq 0$. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\mathbf{E}(X_t - X_0) = \lambda\, t$ pour tout $t \geq 0$ (Ind. On pourra commencer par démontrer cette identité pour $t \in \mathbb{Q}^+$). Montrer également qu'il existe $\sigma \geq 0$ tel que $\mathrm{var}(X_t - X_0) = \sigma\, t$.

Exercice 3

Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ un PAIScàd réel croissant $\mathcal{L}^1$ tel que $X_0 = 0$.
a) - Donner un exemple d'un tel processus.
b) - Montrer que les variables aléatoires

$$\xi_n = \sup_{t\in]n,n+1]} X_t - X_n$$

forment une suite de va iid.
c) - Montrer que X_t/t converge p.s. vers une limite (que l'on déterminera) lorsque $t \in \mathbb{N}$, $t \to +\infty$, puis lorsque $t \in \mathbb{R}_+$, $t \to +\infty$.

Exercice 4

Pour tout $t \geq 0$, on définit la variable aléatoire :

$$Y_t = \int_0^t e^{-s} dB_s$$

a) - Rappeler la définition d'un processus Gaussien.
b) - Montrer qu'une limite dans $\mathcal{L}^2(\Omega)$ d'une suite de variables aléatoires Gaussiennes est encore une va Gaussienne.
c) - Montrer que $(Y_t)_{t\geq 0}$ est un processus gaussien.
d) - Calculer son espérance et sa covariance.
e) - Montrer que (Y_t) est une martingale de carré intégrable et que la famille $\left(\mathbf{E}[Y_t^2]\right)_{t\geq 0}$ est bornée. En déduire que (Y_t) converge p.s. et dans L^2 vers une variable aléatoire Y. Quelle est la loi de Y?

Exercice 5

Soit B_t un mouvement brownien réel standard. Pour $a \in \mathbb{R}^*$ on définit $T_a := \inf\{t > 0;\ B_t = a\}$ et pour $a < 0 < b$ on définit $T := T_a \wedge T_b = \min(T_a, T_b) = \inf\{t > 0;\ B_t \notin]a, b[\}$.

a) - Enoncer précisément le théorème d'arrêt pour une martingale à temps continu.

b) - Montrer que pour tout $t \in (0, \infty)$ on a $\mathbf{E}(B_{T\wedge t}) = 0$. En déduire que $a\,\mathbf{P}(T_a < T_b) + b\,(1 - \mathbf{P}(T_a < T_b)) = 0$ puis exprimer $\mathbf{P}(T_a < T_b)$ en fonction de a et b.

c) - Montrer que pour tout $t \in (0, \infty)$ on a $\mathbf{E}(T \wedge t) = \mathbf{E}(B^2_{T\wedge t})$. En déduire que $\mathbf{E}(T) = |a|\,b$.

Exercice 6

Dans tout cet exercice $B = B_t$ désigne un mouvement brownien réel standard sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, X_0 désigne une variable aléatoire réelle indépendante de B, ϕ désigne un processus réel tel que $\phi \in \mathcal{L}^4([0, T], \mathcal{F}_t\text{-Prog})$, et X désigne le processus d'Itô associé

$$X_t := \int_0^t \phi_s\, dB_s + X_0.$$

Le but du problème est de calculer la variation quadratique du processus X.

Partie A.

1) Montrer que si $f \in C_b^2(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ alors

$$\mathbf{E}(f(X_t)) = \mathbf{E}(f(X_0)) + \frac{1}{2}\int_0^t \mathbf{E}(f''(X_s)\,\phi_s^2)\, ds. \tag{0.1}$$

2) En supposant que (0.1) est encore vraie pour $f(x) = x^4$ (et donc que $X_t \in L^4$ pour tout $t \geq 0$), en déduire que

$$\mathbf{E}(X_t^4) \leq \left(\mathbf{E}(X_0^4) + c_1 \int_0^t \mathbf{E}(\phi_s^4)\, ds\right) e^{c_2\, t} \tag{0.2}$$

pour deux constantes $c_i \geq 0$.

3) Pour quel processus (0.1) est vraie avec $f(x) = x^4$? Démontrer que (0.2) est vraie dans le cas général $\phi \in \mathcal{L}^4(\mathbb{R}_+, \mathcal{F}_t\text{-Prog})$, et donc en particulier $X_t \in \mathcal{L}^4$.

Partie B.

1) Montrer que pour tout $T \geq 0$

$$X_T^2 = X_0^2 + 2\int_0^T X_s\,\phi_s\, dB_s + \int_0^T \phi_s^2\, ds. \tag{0.3}$$

2) Soit une partition $\pi^n = (t_j^n)$, $0 = t_0^n < t_1^n < ... < t_n^n = T$, de $[0, T]$. On définit

$$M_t^n := \sum_{i=1}^{n} X_{t_{i-1}^n} \left(X_{t_i^n \wedge t} - X_{t_{i-1}^n \wedge t}\right)$$

Montrer que

$$M_T^n = \int_0^T \psi_s^n \, dB_s$$

pour une certaine fonction ψ_s^n que l'on explicitera. A quel espace appartient ψ_s^n?

3) On supposera désormais que $\|\pi^n\| := \sup_{1 \le i \le n} |t_i^n - t_{i-1}^n| \to 0$ lorsque $n \to \infty$. Montrer alors que $\psi_s^n \to X_s \, \phi_s$ dans $\mathcal{L}^2([0, T], \mathcal{F}_t\text{-Prog})$ lorsque $n \to \infty$, et en déduire que

$$M_T^n \to \int_0^T X_s \, \phi_s \, dB_s, \tag{0.4}$$

lorsque $n \to \infty$. En quel sens a lieu cette convergence?

4) Montrer d'autre part que pour tout $1 \le j \le n$

$$X_{t_j^n}^2 - 2\, M_{t_j^n}^n = (X_{t_j^n} - X_{t_{j-1}^n})^2 + X_{t_{j-1}^n}^2 - 2\, M_{t_{j-1}^n}^n,$$

puis que

$$X_T^2 - 2\, M_T^n = \sum_{j=1}^{n} (X_{t_j^n} - X_{t_{j-1}^n})^2 + X_0^2.$$

5) Montrer enfin que

$$\mathrm{var}_2(X) := \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} (X_{t_i^n} - X_{t_{i-1}^n})^2 = \int_0^T \phi_s^2 \, ds.$$

En quel sens a lieu cette convergence?