Université Paris-Dauphine **2010-2011**
M1 MMD, Processus Continus Approfondis

Examen du Vendredi 2 Septembre, 13h - 15h

Aucun document ni calculatrice n'est autorisé

Dans tous les exercices $B = B_t$ un mouvement brownien réel standard défini sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ et $\mathcal{F} = \mathcal{F}_t^B$ est la filtration canonique associée.

Exercice 1 *(4 points)*

Soit (B_t) un mouvement Brownien standard. Montrer que les processus suivants sont des $(\mathcal{F}_t^B)$-martingales
a) - $(B_t)_{t\geq 0}$;
b) - $(B_t^2 - t)_{t\geq 0}$;

Exercice 2

On définit $X_s := s\, B_{1/s}$, $s > 0$, $X_0 = 0$.
a) - Montrer que la loi de X_s est identique à celle de B_s pour tout $s > 0$. Montrer que $X_s \to 0$ lorsque $s \to 0$ en loi et en probabilité.
b) - Enoncer précisément la loi forte des grands nombres. Montrer que B_n/n converge p.s. vers une limite (que l'on déterminera) lorsque $n \in \mathbb{N}$, $n \to +\infty$.
c) - On introduit la suite de va

$$\xi_n := \sup_{n<t\leq n+1} |B_t - B_n|.$$

Montrer que les (ξ_n) forment une suite de va iid.
d) - Montrer que

$$\mathbf{E}(\xi_1) = \int_0^\infty \mathbf{P}(\xi_1 \geq \varepsilon)\, d\varepsilon \quad \text{et} \quad \mathbf{P}(\xi_1 \geq \varepsilon) \leq 2\, P(|B_1| \geq \varepsilon).$$

En déduire que $\xi_1 \in L^1$, que p.s. $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \xi_i$ converge lorsque $n \to \infty$ vers une limite que l'on déterminera et enfin que

$$p.s. \qquad \frac{\xi_n}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

e) Montrer que

$$p.s. \qquad \frac{B_t}{t} \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

et que X_s est un mouvement Brownien.

Exercice 3 *(5 points)*

Pour tout $t \geq 0$, on définit la variable aléatoire :

$$Y_t = \int_0^t e^{-s} dB_s$$

a) - Rappeler la définition d'un processus Gaussien.

b) - Montrer qu'une limite dans $\mathcal{L}^2(\Omega)$ d'une suite de variables aléatoires Gaussiennes est encore une va Gaussienne.

c) - Montrer que $(Y_t)_{t\geq 0}$ est un processus gaussien.

d) - Calculer son espérance et sa covariance.

e) - Montrer que (Y_t) est une martingale de carré intégrable et que la famille $\big(\mathbf{E}[Y_t^2]\big)_{t\geq 0}$ est bornée. En déduire que (Y_t) converge p.s. et dans L^2 vers une variable aléatoire Y. Quelle est la loi de Y?

Exercice 4

On rappelle que pour tout $\phi \in L^p(\mathrm{Prog})$, $1 \leq p < \infty$, il existe une suite $\phi^n \in \mathscr{E}\mathrm{sc}(\mathrm{Prog}) \cap L^\infty$ telle que $\phi^n \to \phi$ dans L^p.

a) - Démontrer que si une variable aléatoire Y s'écrit sous la forme

$$Y = \sum_{i=1}^n \psi_i \, \Delta_i, \qquad \psi_i \in L^\infty, \;\; \Delta_i \in L^p, \;\; p \in [1, \infty],$$

alors $Y \in L^p$. En déduire que si $\psi \in \mathscr{E}\mathrm{sc}(\mathrm{Prog}) \cap L^\infty$ alors le processus d'Itô

$$Y_t := \int_0^t \psi_s \, dB_s$$

appartient à tous les espaces L^p, $1 \leq p < \infty$.

b) - Démontrer que si M^n est une suite de martingales et que $M_t^n \to M_t$ dans L^1 pour tout $t \geq 0$, alors M est encore une martingale.

c) - Soit $\phi \in L^2(\mathrm{Prog})$. On définit le processus d'Itô

$$(1) \qquad\qquad X_t := \int_0^t \phi_s \, dB_s.$$

Démontrer que $X_t^2 - \int_0^t \phi_s^2 \, ds$ est une martingale.

d) - Soit $\phi \in L^4(\mathrm{Prog})$. Démontrer que le processus X défini par (1) satisfait $X_t \in L^4$ pour tout $t \geq 0$.