Université Paris-Dauphine **2011-2012**
M1 MMD, Processus Continus Approfondis

Examen du Mardi 29 Mai, 16h30 - 18h30

Aucun document ni calculatrice n'est autorisé

Dans tous les exercices $B = B_t$ un mouvement brownien réel standard défini sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ et $\mathcal{F} = \mathcal{F}_t^B$ est la filtration canonique associée.

Exercice 1

a) - Rappeler la définition d'un PAI.

b) - Soit (X_t) un PAI tel que $\mathbf{E}(e^{aX_t}) < \infty$ pour tout $t \geq 0$; $a \in \mathbb{R}$ fixé. Montrer que $e^{z\,X_t}/\mathbf{E}(e^{zX_t})$ est une martingale si $\Re e\, z \leq a$.

Exercice 2

a) - Montrer que $B_t^2 - t$ est une martingale.

b) - Soit $T := \inf\{t;\ B_t \notin]-a, a[\}$ le temps de sorti de l'intervalle $]-a, a[$, $a > 0$. Pour tout $M > 0$, montrer que $\mathbf{E}(B_{T\wedge M}^2) = \mathbf{E}(T \wedge M)$. En déduire $\mathbf{E}(T) = a^2$.

c) - Rappeler la formule d'Itô pour le processus B et une fonction $f \in C_b^2(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$. En déduire que le processus $B_t^4 - 6\,t\,B_t^2 + 3t^2$ est une martingale.

d) - Exprimer $\mathbf{E}(B_{T\wedge M}^4)$ en fonction de $B_{T\wedge M}^2$ et $T \wedge M$. En déduire que $\mathbf{E}(T^2) = 5\,a^4/3$.

Exercice 3

Pour $T > 0$ fixé, on définit

$$\mathcal{H} := \Big\{X \in L^2(\mathcal{F}_T^B);\ \exists \phi \in L^2(Prog) \qquad (1) \qquad X = \mathbf{E}(X) + \int_0^T \phi_s\, dB_s \Big\}.$$

a) - Montrer que si $X \in \mathcal{H}$ alors le processus $\phi \in L^2(Prog)$ pour lequel (1) a lieu est unique.

b) - Montrer que si X^n vérifie (1) pour le processus $\phi^n \in L^2(Prog)$ et $X^n \to X$ dans L^2, alors (ϕ^n) est une suite de Cauchy dans $L^2(Prog)$. En déduire que $\mathcal{H}$ est un sev fermé de L^2.

c) - Pour deux suites $0 = t_0 < ... < t_n = T$ et $\lambda_1, ..., \lambda_n$, on définit

$$M_t := \exp[i\,X_t], \quad X_t := (\phi \bullet B)_t, \quad \phi_s := \sum_{k=1}^n \lambda_k\, \mathbf{1}_{]t_{k-1},t_k]}(s)$$

En notant

$$f(t, X) := \exp\Big[i\,X + \frac{1}{2}\int_0^t \phi_s^2\, ds\Big],$$

montrer que

$$f(T, X_T) = 1 + i\int_0^T f(s, X_s)\,\phi_s\, dB_s.$$

En déduire que $M_T \in \mathcal{H}$.
d) - Avec les notations de la question précédente, montrer que l'espace engendré par les variables

$$\exp\Big(i\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\,(B_{t_k}-B_{t_{k-1}})\Big)$$

est dense dans $L^2(\Omega,\mathcal{F}_T^B)$. En déduire que $\mathcal{H}$ est dense dans $L^2(\Omega,\mathcal{F}_T^B)$.
e) - Pourquoi $\mathcal{H} = L^2(\Omega,\mathcal{F}_T^B)$? Soit maintenant (M_t) une $\mathcal{F}^B$-martinagle bornée dans L^2. Montrer qu'il existe un unique processus $\phi \in L^2(Prog)$ tel que

$$M_T = \mathbf{E}(M_T) + \int_0^T \phi_s\,dB_s.$$

En déduire que toute $\mathcal{F}^B$-martinagle (M_t) bornée dans L^2 peut s'écrire sous la forme d'une intégrale brownien: $\exists\,\phi \in L^2(Prog)$

$$M_t = \mathbf{E}(M_0) + \int_0^t \phi_s\,dB_s, \qquad \forall\,t\in[0,T], \quad \text{pui} \quad \forall\,t\geq 0.$$

Exercice 4

Sur $E=\mathbb{R}$, on se donne une chaîne de Markov (Y_n) définie par

$$\mathbf{E}(f(Y_{k+\ell})\,f_k(Y_k)\,...\,f_1(Y_1)) = \mathbf{E}(U^\ell f(Y_k)\,f_k(Y_k)\,...\,f_1(Y_1)),$$

pour tout $k,\ell\geq 1$, $f, f_k, ..., f_1 \in C_b(\mathbb{R})$, et avec

$$(Ug)(x) := \int_{\mathbb{R}} g(y)\,\mu(x,dy),$$

pour un taux de transition de Markov $\mu : \mathbb{R}\times\mathcal{B}(\mathbb{R}) \to [0,1]$ donné. On rappelle que U^ℓ est défini par récurrence, en posant pour $\ell\geq 2$

$$(U^\ell g)(x) = \int_{\mathbb{R}} (U^{\ell-1}g)(y)\,\mu(x,dy) =: \int_{\mathbb{R}} g(y)\,\mu^\ell(x,dy).$$

On se donne un processus de Poisson (N_t) d'intensité $\lambda>0$ indépendant de (Y_n) et on pose $X_t := Y_{N_t}$.
a) - Montrer que (X_t) est un processus de Markov homogène et de taux de transition

$$p_t(x,A) := \sum_{n=0}^{\infty} \mu^n(x,A)\,\frac{(\lambda\,t)^n}{n!}\,e^{-\lambda t},$$

avec la convention $\mu^0(x,dy)=\delta_x(dy)$.
b) - On définit pour tout $f\in C_b^1(\mathbb{R})$

$$(T_t f)(x) = \mathbf{E}(f(X_t)|X_0=x) = \int_{\mathbb{R}} f(y)\,p_t(x,dy) = \sum_{n=0}^{\infty}(U^n f)(x)\frac{(\lambda\,t)^n}{n!}\,e^{-\lambda t}.$$

Montrer que

$$(Lf)(x) := \frac{d}{ds}(T_t f)(x)_{t=0} = \int_{\mathbb{R}} (f(y)-f(x))\,\mu(x,dy).$$