**Université Paris-Dauphine** **2011-2012**
M1 MMD, Processus Continus Approfondis

*Examen du Lundi 3 Septembre, 13h30 - 15h30*

*Aucun document ni calculatrice n'est autorisé*

Dans tous les exercices $B = B_t$ est un mouvement brownien réel standard défini sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ et $\mathcal{F} = \mathcal{F}_t^B$ est la filtration canonique associée.

## Exercice 1

Soit $(B_t)$ un mouvement Brownien standard. Montrer que les processus suivants sont des $(\mathcal{F}_t^B)$-martingales
a) - $(B_t)_{t\geq 0}$;
b) - $(B_t^2 - t)_{t\geq 0}$.

## Exercice 2

Soient $a > 0$ et $b$ deux réels. On cherche à calculer la probabilité que $B$ atteigne la droite $t \mapsto (at + b)$. On introduit donc

$$T = \inf\{t \geq 0,\ B_t = at + b\} \quad \text{avec la convention } \inf\{\varnothing\} = +\infty.$$

1) Calculer $P(T < +\infty)$ dans le cas $\mathbf{b \leq 0}$.

**On suppose maintenant $\mathbf{b > 0}$.**

2) Montrer que pour tout réel $\alpha$, le processus $(e^{\alpha B_t - \frac{\alpha^2}{2} t})_{t\geq 0}$ est une martingale.
3) Montrer que si $X$ est un processus réel continu et $F$ est un fermé de $\mathbb{R}$ alors $T_F(\omega) := \inf\{s;\ X_s(\omega) \in F\}$ est un temps d'arrêt. On pourra commencer par montrer que $\{T_F \leq t\} = \{d((X_u)_{0\leq u\leq t}, F) = 0\}$.
4) Montrer que $T$ est un temps d'arrêt.
5) Pourquoi ne peut-on pas appliquer directement le théorème d'arrêt à $T$? Montrer que pour tout $\alpha$ et tout $t > 0$:

$$E[e^{\alpha B_{T\wedge t} - \frac{\alpha^2}{2}(T\wedge t)}] = 1.$$

6) Calculer la limite p.s. quand $t$ tend vers l'infini de $e^{\alpha B_{T\wedge t} - \frac{\alpha^2}{2}(T\wedge t)}$.
7) Montrer que pour $\alpha = 2a$, on peut appliquer le théorème de convergence dominé.
8) En déduire $P(T < +\infty)$.
9) Comment traite-t-on facilement le cas $a < 0$?

## Exercice 3

Pour tout $t \geq 0$, on définit la variable aléatoire :

$$Y_t = \int_0^t e^{-s} dB_s$$

a) - Rappeler la définition d'un processus Gaussien.

b) - Montrer qu'une limite dans $\mathcal{L}^2(\Omega)$ d'une suite de variables aléatoires Gaussiennes est encore une va Gaussienne.

c) - Montrer que $(Y_t)_{t\geq 0}$ est un processus gaussien.

d) - Calculer son espérance et sa covariance.

e) - Montrer que $(Y_t)$ est une martingale de carré intégrable et que la famille $\left(\mathbf{E}[Y_t^2]\right)_{t\geq 0}$ est bornée. En déduire que $(Y_t)$ converge p.s. et dans $L^2$ vers une variable aléatoire $Y$. Quelle est la loi de $Y$?

## Exercice 4

Soient deux fonctions $b, \sigma$ Lipschitziennes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, i.e.

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R} \qquad |b(y) - b(x)| \leq L\,|x - y|, \quad |\sigma(y) - \sigma(x)| \leq L\,|x - y|,$$

et une variable aléatoire $X_0$ indépendante de $B$ définie sur le même espace $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$. On définit l'application qui à $X \in L^2([0,T]; \mathrm{Prog})$ associe $\Lambda(X) = Y$ le processus défini par

$$Y_t := X_0 + \int_0^t b(X_s)\, ds + \int_0^t \sigma(X_s)\, dB_s.$$

a) - Montrer que $\Lambda : L^2([0,T]; \mathrm{Prog}) \to L^2([0,T]; \mathrm{Prog})$.

b) - Etant donnés deux processus $X_i \in L^2(\mathrm{Prog})$, $i = 1, 2$, et en notant $Y_i := \Lambda(X_i)$, montrer que

$$\int_0^T \mathbf{E}(|Y_{2t} - Y_{1t}|^2)\, dt \quad \leq \quad (T^2 + 2\,T)\, L^2 \int_0^T \mathbf{E}\left(|X_{2s} - X_{1s}|^2\right)\, ds.$$

c) - En déduire que pour $T > 0$ assez petit, puis pour tout $T > 0$, il existe un unique processus $X \in L^2([0,T]; \mathrm{Prog})$ tel que

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(X_s)\, ds + \int_0^t \sigma(X_s)\, dB_s.$$

d) - On note $\mu_t$ la loi de $X_t$. Montrer que pour tout $\varphi \in C_c^2([0,T[\times\mathbb{R})$ on a

$$\mathbf{E}(\varphi(T, X_T)) \quad = \quad \int_{\mathbb{R}} \varphi(0, .)\, \mu_0(dx) + \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \left\{\partial_t \varphi + b\, \partial_x \varphi + \frac{\sigma^2}{2}\, \partial^2_{xx} \varphi\right\} (t, x)\, \mu_t(dx).$$

En supposant que $\mu_t(dx) = u(t,x)\, dx$ avec $u(t,x) \in C^2([0,T] \times \mathbb{R})$, en déduire l'équation aux dérivées partielles satisfaite par $u$.