Université Paris-Dauphine **2011-2012**
M1 MMD, Processus Continus Approfondis

Partiel du Jeudi 29 Mars, 14h-16h
Aucun document ni calculatrice n'est autorisé

Dans tous les exercices $B = B_t$ un mouvement brownien réel standard défini sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ et $\mathcal{F} = \mathcal{F}_t^B$ est la filtration canonique associée càd et contenant les négligeables de $\mathcal{A}$.

Exercice 1

a) - Montrer que pour tout $a > 0$, le processus $X_t := a^{-1} B_{a^2 t}$ est un mouvement brownien.
b) - Soit M une martingale réelle de carré intégrable. Montrer que $S := M^2$ est une sous-martingale.

Exercice 2

On définit le processus $(Z_t)_{0 \le t \le 1}$ par la formule $Z_t := B_t - t\, B_1$.
a) - Pour tous $0 \le t_1 < ... < t_n \le 1$, montrer que le vecteur $(Z_{t_1}, ..., Z_{t_n}, B_1)$ est un vecteur gaussien et calculer sa matrice de covariance.
b) - Montrer que $(Z_t)_{0 \le t \le 1}$ est un processus gaussien indépendant de B_1.
c) - Montrer que le processus $Z'_t = Z_{1-t}$, $0 \le t \le 1$, a même loi que Z.
d) - On définit $Y_t := (1-t)\, B_{t/(1-t)}$, $0 \le t \le 1$.
Montrer que $Y_t \to 0$ p.s. lorsque $t \to 1$; on pose $Y_1 = 0$.
Montrer que Y_t, $0 \le t \le 1$, a même loi que Z.

Exercice 3

Soient $a > 0$ et b deux réels. On cherche à calculer la probabilité que B atteigne la droite $t \mapsto (at + b)$. On introduit donc

$$T = \inf\{t \ge 0,\ B_t = at + b\} \quad \text{avec la convention } \inf\{\varnothing\} = +\infty.$$

1) Calculer $P(T < +\infty)$ dans le cas $\mathbf{b \le 0}$.

On suppose maintenant $\mathbf{b > 0}$.

2) Montrer que pour tout réel α, le processus $(e^{\alpha B_t - \frac{\alpha^2}{2} t})_{t \ge 0}$ est une martingale.
3) Montrer que si X est un processus réel continu et F est un fermé de $\mathbb{R}$ alors $T_F(\omega) := \inf\{s;\ X_s(\omega) \in F\}$ est un temps d'arrêt. On pourra commencer par montrer que $\{T_F \le t\} = \{d((X_u)_{0 \le u \le t}, F) = 0\}$.
4) Montrer que T est un temps d'arrêt.
5) Pourquoi ne peut-on pas appliquer directement le théorème d'arrêt à T? Montrer que pour tout α et tout $t > 0$:

$$E[e^{\alpha B_{T \wedge t} - \frac{\alpha^2}{2}(T \wedge t)}] = 1.$$

6) Calculer la limite p.s. quand t tend vers l'infini de $e^{\alpha B_{T \wedge t} - \frac{\alpha^2}{2}(T \wedge t)}$.
7) Montrer que pour $\alpha = 2a$, on peut appliquer le théorème de convergence dominé.
8) En déduire $P(T < +\infty)$.
9) Comment traite-t-on facilement le cas $a < 0$?