Équations aux dérivées partielles / Partial Differential Equations

Existence globale pour l'équation de Smoluchowski continue non homogène et comportement asymptotique des solutions.

Stéphane MISCHLER [a], **Mariano RODRIGUEZ RICARD** [b]

[a] Laboratoire de Mathématiques Appliquées, Université de Versailles, Versailles Cedex F78035.
[b] Facultad de Matemática y Computación, Universidad de La Habana, C.Habana 10400, Cuba.

Résumé. Nous démontrons l'existence globale de solutions pour l'équation de Smoluchowski continue non homogène pour des taux de coagulation satisfaisant une hypothèse de structure plus générale que l'hypothèse de monotonie de Galkin-Tupchiev considérée dans [4]. Le taux de coagulation de Smoluchowski vérifie cette condition, ainsi que certains taux s'annulant sur la diagonale. Sous une condition supplémentaire de stricte positivité en dehors de la diagonale, nous montrons que les solutions tendent vers 0 asymptotiquement en temps grand. Ces résultats reposent sur une nouvelle estimation du taux de dissipation de le norme L^p, $p > 1$.

Global existence for the continuous non homogeneous Smoluchowski equation and asymptotic behaviour of the solutions.

Abstract. We prove global existence of solutions to the continuous non homogeneous Smoluchowski equation for coagulation rates satisfying a more general structure condition than the Galkin-Tupchiev monotony hypothesis considered in [4]. Smoluchowski coagulation rate fulfils this condition as well as some rates which vanish on the diagonal. Under the condition of positivity of the coagulation rate outside of the diagonal we prove that solutions tend to 0 in the large time asymptotic. These results depend on a new estimate from below for the dissipation rate of the L^p-norm, $p > 1$.

Abridged English Version.

In this Note, we consider the Cauchy problem for the continuous non homogeneous Smoluchowski equation which provide a model for the dynamic of clusters undergoing coalescence and diffusion processes. More precisely, describing the system by the distribution function $f(t, x, y) \geq 0$ of clusters with size $y \in \mathbb{R}_+ = (0, \infty)$ at time $t \geq 0$ and position $x \in \Omega$, we are interested by the question of existence and long time asymptotic behavior of solutions to the Smoluchowski equation

$$\partial_t f - d(y)\, \Delta_x f = Q(f) = Q_1(f) - Q_2(f) \qquad (0, +\infty) \times \Omega \times \mathbb{R}_+, \tag{1.1}$$

$$\partial_n f = 0 \qquad (0, +\infty) \times \partial\Omega \times \mathbb{R}_+, \tag{1.2}$$

$$f(0, x, y) = f^{in}(x, y) \qquad \Omega \times \mathbb{R}_+. \tag{1.3}$$

Reaction terms involved in the coagulation kernel are given by

$$Q_1(f)(y) = \frac{1}{2} \int_0^y a(y', y - y')\, f(y')\, f(y - y')\, dy', \quad Q_2(f)(y) = \int_0^\infty a(y, y')\, f(y')\, f(y)\, dy',$$

and we assume that the coagulation rate a satisfies the structure conditions

$$0 \leq a(y, y') = a(y', y) \leq a(y, y'') + a(y', y'') \qquad \forall\, y, y' > 0, \quad y'' = y + y', \tag{1.4}$$

as well as the growth hypothesis : $\forall\, R' \geq R > \delta > 0$

$$(1.5)\qquad a_{\delta,R} := \sup_{y,y'\in[\delta,R]} a(y,y') < \infty, \qquad \omega_{\delta,R}(R') := \sup_{y\in[\delta,R],y'\geq R'} \frac{a(y,y')}{y'} \underset{R'\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Let emphasize that condition (1.4) is more general than the so-called Galkin-Tupchiev monotony condition [3]: $a(y, y'-y) \leq a(y,y')$ for any $0 < y < y'$ under which global existence has been obtened in [4]. Indeed, the Smoluchowski rate $a(y,y') = (y^{1/3} + (y')^{1/3})\,(y^{-1/3} + (y')^{-1/3})$ (see [9]) and the rate $a(y,y') = (y^{1/3} + {y'}^{1/3})\,|{y'}^{1/3} - y^{1/3}|$ (see [1]), satisfy (1.4) but do not satisfy the Galkin-Tupchiev monotony condition. Last, we assume that $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ is a smooth bounded domain and that the diffusion coefficient $d = d(y)$ satisfies $d \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$.

Our main result is the following lower bound on the dissipation rate of the L^p-norm.

Lemma 1. *Let $p \in (1,\infty)$ and assume $a \in L^\infty$. For any $0 \leq f \in L^1 \cap L^p$ there holds*

$$(1.7)\qquad D_p(f) := -p \int_0^\infty Q(f)\, f^{p-1}\, dy \geq (p-1) \int_0^\infty \int_0^\infty a\, \mathbf{1}_{y>y'}\, f\, (f')^p\, dy' dy.$$

As a consequence, we obtain existence and asymptotic behavior results, following the method of proof developped in [4].

Theorem 2. *Let $p \in (1,\infty]$ and $k \in \mathbb{R}_+$. For any $0 \leq f_{in} \in L^1_1 \cap L^p \cap L^1_{-k}$, there exists at least one solution $f \in C([0,\infty); L^1)$ to the continuous non homogeneous Smoluchowski equation (1.1)-(1.3) satisfying (3.1)–(3.4).*

We use the notations $L^r_\ell := \{f : Z \to \mathbb{R}$ measurable, such that $(1 + |z|^\ell)\,|f(z)|^r \in L^1(Z)\}$. We refer to Definition 2.1 in [4] for the definition of solutions we deal with.

Theorem 3. *Under the additional assumption that a satisfies $a(y,y') > 0$ for any $y, y' > 0$ such that $y' \neq y$, there holds $f(t,.) \to 0$ in $L^1(\Omega \times \mathbb{R}_+)$ when $t \to \infty$.*

To our knowledge, Smoluchowski rate has been previously considered only by Norris [6] where he proves an existence result in the space homogeneous setting. Notice that Theorem 3 is classical for coagulation rates satisfying $a(y,y') > 0$ for any $y, y' > 0$. This result is then interesting for coagulation rates vanishing on the diagonal. For such a rate, one verifies that for any $\bar\rho, \bar y \in \mathbb{R}$ the Dirac mass $F(x,y) = \bar\rho\, \delta_{y=\bar y}$ is a stationary state, but Theorem 3 says that the only stable equilibrium is $F(x,y) = 0$.

We refer to [5] for similar results to Theorem 3 for the discrete homogeneous and continuous homogeneous version of the Smoluchowski equation. We refer to [2] for an extension of the results presented here to the droplet coalescence model introduced in [7] and recently studied in [8]. In [2], we also remove the technical hypothesis $f_{in} \in L^p \cap L^1_{-k}$ and we establish Theorem 2 and Theorem 3 under the sole assumption $f_{in} \in L^1_1$.

1. Introduction.

Dans cette note, nous considérons le problème de Cauchy pour l'équation de coagulation continue non homogène régissant l'évolution d'un système de particules de tailles variables soumis au double processus d'agglomération et de diffusion. Plus précisément, on représente le système par la densité de particules $f = f(t,x,y) \geq 0$ qui possèdent la taille $y \in \mathbb{R}_+ = (0,\infty)$ à l'instant

$t > 0$ et en la position $x \in \Omega$ et on s'intéresse au problème de l'existence et du comportement asymptotique en temps grand d'une solution de l'équation de Smoluchowski continue

$$\partial_t f - d(y)\, \Delta_x f = Q(f) = Q_1(f) - Q_2(f) \qquad (0,+\infty) \times \Omega \times \mathbb{R}_+, \tag{1.1}$$
$$\partial_n f = 0 \qquad (0,+\infty) \times \partial\Omega \times \mathbb{R}_+, \tag{1.2}$$
$$f(0,x,y) = f^{in}(x,y) \qquad \Omega \times \mathbb{R}_+. \tag{1.3}$$

Les termes de réactions intervenant dans le noyau de coagulation sont donnés par

$$Q_1(f)(y) = \frac{1}{2} \int_0^y a(y', y-y')\, f(y')\, f(y-y')\, dy', \quad Q_2(f)(y) = \int_0^\infty a(y,y')\, f(y')\, f(y)\, dy',$$

et nous supposons que le taux de coagulation a satisfait les conditions de structure

$$0 \le a(y,y') = a(y',y) \le a(y,y'') + a(y',y'') \qquad \forall\, y, y' > 0, \quad y'' = y + y', \tag{1.4}$$

et les conditions de croissance suivantes: $\forall\, R' \ge R > \delta > 0$

$$a_{\delta,R} := \sup_{y,y' \in [\delta,R]} a(y,y') < \infty, \qquad \omega_{\delta,R}(R') := \sup_{y \in [\delta,R], y' \ge R'} \frac{a(y,y')}{y'} \underset{R' \to \infty}{\longrightarrow} 0. \tag{1.5}$$

Soulignons que la condition (1.4) est plus générale que la condition de monotonie de Galkin-Tupchiev [3]: $a(y, y'-y) \le a(y,y')$ pour tout $0 < y < y'$ sous laquelle l'existence de solutions globales a été obtenue dans [4]. En effet, la condition (1.4) est satisfaite par le taux de coagulation considéré par Smoluchowski [9]

$$a(y,y') = (y^{1/3} + (y')^{1/3})\, (y^{-1/3} + (y')^{-1/3})$$

et par le taux [1]

$$a(y,y') = (y^{1/3} + y'^{1/3})\, |y'^{1/3} - y^{1/3}|, \tag{1.6}$$

deux taux qui en revanche, ne satisfont pas l'hypothèse de monotonie de Galkin-Tupchiev. Nous supposons également que $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ est un domaine borné régulier et que la constante de diffusion $d = d(y)$ satisfait $d \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$.

Le résultat principal de cette note est l'estimation suivante sur le taux de dissipation de la norme L^p.

Lemme 1. *Soit $p \in (1,\infty)$ et supposons, de plus, $a \in L^\infty$. Pour tout $0 \le f \in L^1 \cap L^p$, on a*

$$D_p(f) := -p \int_0^\infty Q(f)\, f^{p-1}\, dy \ge (p-1) \int_0^\infty \int_0^\infty a\, \mathbf{1}_{y>y'}\, f\, (f')^p\, dy' dy. \tag{1.7}$$

Comme conséquence du Lemme 1, on déduit les résultats d'existence et de comportement asymptotique suivants, en s'inspirant de la méthode de démonstration développée dans [4].

Théorème 2. *Soient $p \in (1,\infty]$ et $k \in \mathbb{R}_+$. Pour tout $0 \le f_{in} \in L^1_1 \cap L^p \cap L^1_{-k}$, il existe au moins une solution $f \in C([0,\infty); L^1)$ à l'équation de Smoluchowski continue non homogène (1.1)–(1.3) qui satisfait les bornes (3.1)–(3.4).*

On utilise ici la notation $L^r_\ell := \{f : Z \to \mathbb{R}$ mesurable, telle que $(1+|z|^\ell)\,|f(z)|^r \in L^1(Z)\}$. Nous renvoyons à la Définition 2.1 [4] pour le sens à donner à une solution de l'équation de Smoluchowski (1.1)-(1.3).

Théorème 3. *Sous les hypothèses précédentes et si, de plus, a satisfait $a(y,y') > 0$ pour tout $y, y' > 0$ tel que $y' \neq y$, alors*

$$f(t,.) \to 0 \quad \textit{dans} \quad L^1(\Omega \times \mathbb{R}_+) \quad \textit{lorsque} \quad t \to \infty. \tag{1.8}$$

À notre connaissance, le taux de coagulation de Smoluchowski a été considéré uniquement dans Norris [6], où il démontre un résultat d'existence de solutions dans un cadre homogène. Notons que le Théorème 3 est classique pour les taux de coagulation satisfaisant $a(y,y') > 0$ pour tout $y, y' > 0$. L'intérêt du Théorème 3 est donc pour des taux qui s'annulent sur la diagonale du type (1.6). Pour de tels taux, on vérifie que pour tout $\bar\rho, \bar y \in \mathbb{R}$ la masse de Dirac $F(x,y) = \bar\rho\,\delta_{y=\bar y}$ est un état stationnaire, mais le Théorème 3 affirme que le seul équilibre stable est $F(x,y) = 0$.

Nous renvoyons à [5] pour des résultats semblables au Théorème 3 pour la version homogène discrète et homogène continue de l'équation de Smoluchowski. Nous renvoyons également à [2] pour une extension des résultats présentés ici, au modèle de coalescence de gouttelettes introduit dans [7] et étudié récemment dans [8] dans un cadre homogène en espace. Dans [2], nous nous débarassons également de l'hypothèse technique $f_{in} \in L^p \cap L^1_{-k}$, c'est-à-dire, nous établissons les Théorèmes 2 et 3 sous la seule hypothèse $f_{in} \in L^1_1$.

2. Démonstration du Lemme 1.

Supposons dans un premier temps $f \in C_c(\mathbb{R}_+)$ et que $\mathrm{mes}\{y \in \mathbb{R}_+,\ f(y) = \lambda\} = 0$ pour tout $\lambda > 0$. Cette dernière condition implique, en particulier,

$$\mathrm{mes}\{(y,y') \in \mathbb{R}^2 \text{ t.q. } f(y) > 0,\, f(y') > 0 \text{ et } f(y) = f(y')\} = 0. \tag{2.1}$$

Par l'hypothèse de symétrie (1.4) et grâce à (2.1), on a

$$\begin{aligned} D_p(f) &= \frac{p}{2} \int_0^\infty \int_0^\infty a\, f\, f'\, (f^{p-1} + (f')^{p-1} - (f'')^{p-1})\, dydy' \\ &= p \int_0^\infty \int_0^\infty a\, f\, (f')^p\, dydy' - p \int_0^\infty \int_0^\infty a\, f\, f'\, (f'')^{p-1}\, \mathbf{1}_{f>f'}\, dydy'. \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Young et l'hypothèse de structure (1.4) il vient

$$\begin{aligned} D_p(f) &\geq p \int_0^\infty \int_0^\infty a\, f\, (f')^p\, dydy' - \int_0^\infty \int_0^\infty a\, \mathbf{1}_{f>f'}\, f'\, [f^p + (p-1)\,(f'')^p]\, dydy' \\ &\geq (p-1) \left\{ \int_0^\infty \int_0^\infty a\, f\, (f')^p\, dydy' - \int_0^\infty \int_0^\infty (a(y,y'') + a(y',y''))\, \mathbf{1}_{f>f'}\, f'\, (f'')^p\, dydy' \right\} \\ &\geq (p-1) \left\{ \int_0^\infty \int_0^\infty a\, f\, (f')^p\, dydy' - \int_0^\infty \int_0^\infty (a(y,y'')\, f + a(y',y'')\, f')\, \mathbf{1}_{f>f'}\, (f'')^p\, dydy' \right\} \\ &\geq (p-1) \left\{ \int_0^\infty \int_0^\infty a(y,y')\, f\, (f')^p\, dydy' - \int_0^\infty \int_0^\infty a(y,y'')\, f\, (f'')^p\, dydy' \right\}, \end{aligned}$$

et on obtient (1.7) en effectuant le changement de variable $(y,y') \to (y,y'')$ dans la dernière intégrale. On démontre alors (1.7) pour $f \in L^1 \cap L^p$ grâce à un argument de densité. □

3. Idée de la démonstration du Théorème 2.

Il suffit de reprendre la preuve du théorème d'existence sous l'hypothèse de monotonie de Galkin-Tupchiev présentée dans [4]. En intégrant l'équation (1.1) contre les multiplicateurs y, y^{-k} et $q\, f^{q-1}$ (avec $q \in (1,p] \cap (1,\infty)$), et en utilisant (1.4), on obtient formellement les bornes

$$\sup_{t\ge 0} \int_\Omega\int_0^\infty f(t,.)\, y\, dydx \le \int_\Omega\int_0^\infty f_{in}\, y\, dydx, \tag{3.1}$$

$$\sup_{t\ge 0} \int_\Omega\int_0^\infty f(t,.)\, y^{-k}\, dydx + \frac{1}{2}\int_0^\infty\int_\Omega L_k(f)\, dxdt \le \int_\Omega\int_0^\infty f_{in}\, y^{-k}\, dydx, \tag{3.2}$$

avec $L_k(f) = \displaystyle\int_0^\infty\int_0^\infty a\, y^{-k}\, f\, f'\, dy'dy$, et

$$\sup_{t\ge 0} \int_\Omega\int_0^\infty f^q(t,.)\, dydx + \int_0^\infty\int_\Omega D_q(f)\, dxdt \le \int_\Omega\int_0^\infty f_{in}^q\, dydx. \tag{3.3}$$

Enfin, en laissant tendre $q \to \infty$, il vient

$$\|f(t,.)\|_{L^\infty} \le \|f_{in}\|_{L^\infty} \quad \text{lorsque} \quad p = \infty. \tag{3.4}$$

Le seul point alors éventuellement délicat est de montrer que les bornes a priori (3.1)–(3.3) impliquent que le noyau de coagulation $Q(f)$ appartient à un compact faible de $L^1((0,T)\times\Omega\times(0,R))$ pour tout $T,R>0$. On fixe $T,R>0$, $E\subset \Omega_T\times(0,R)$ mesurable, $\Omega_T := (0,T)\times\Omega$. On note $A = a\, f\, f'\, \mathbf{1}_E$ et pour $M,\delta>0$, $R'\ge R$ on calcule

$$\begin{aligned}
\int_0^R Q_2(f)\,\mathbf{1}_E\, dy &\le \delta^k \int_0^\delta\int_0^\infty A\, y^{-k}\, dy'dy + \delta^k\int_\delta^R\int_0^\delta A\, y^{-k} dy'dy \\
&+ \int_\delta^R\int_\delta^y A\left(\frac{(f')^{q-1}}{M^{q-1}}\,\mathbf{1}_{f'\ge M} + \mathbf{1}_{f'\le M}\right) dy'dy \\
&+ \int_\delta^R\int_y^\infty A\,\frac{f^{q-1}}{M^{q-1}}\,\mathbf{1}_{f\ge M}\, dy'dy + \int_\delta^R\int_y^{R'} A\,\mathbf{1}_{f\le M}\, dy'dy + \int_\delta^R\int_{R'}^\infty A\,\mathbf{1}_{f\le M}\, dy'dy \\
&\le 2\,\delta\, L_k(f) + 2\,\frac{D_q(f)}{(q-1)\,M^{q-1}} + a_{\delta,R'}\, M\,(R\,\|f\|_{L^1(E_{t,x})} + |E_{t,x}|\,\|f\|_{L^1}) + M\,\|f\|_{L^1_1}\,\omega_{\delta,R}(R'),
\end{aligned}$$

avec $E_{t,x} := \{y\in\mathbb{R}_+,\ (t,x,y)\in E\}$. On en déduit, en faisant tendre (dans cet ordre) $|E|\to 0$, $R'\to\infty$, $M\to\infty$ puis $\delta\to 0$, que si (f_n) satisfait les bornes (3.1)–(3.3) uniformément en n alors

$$\limsup_{|E|\to 0}\ \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{\Omega_T}\int_0^R Q_2(f_n)\,\mathbf{1}_E\, dydxdt = 0,$$

ce qui permet de conclure grâce au Théorème de Dunford-Pettis. Le terme $Q_1(f)$ se traite de la même manière. □

4. Idée de la démonstration du Théorème 3.

Commençons par remarquer qu'en intégrant l'équation de Smoluchowski (1.1) et en utilisant les symétries (1.4), la dissipation du nombre de particules D_1 satisfait

$$\int_0^\infty\int_\Omega D_1(f)\, dxdt = \frac{1}{2}\int_0^\infty\int_\Omega\int_0^\infty\int_0^\infty a\, f\, f'\, dy'dydxdt \le \int_\Omega\int_0^\infty f_{in}\, dydx < \infty. \tag{4.1}$$

Considérons alors une suite de temps (t_n) croissante et tendant vers $+\infty$. On déduit de la borne (3.3)-(3.4), quitte à extraire une sous-suite,

$$f_n(t,.) := f(t_n + t,.) \rightharpoonup F \quad \text{faiblement dans} \quad L^p((0,T)\times\Omega\times(0,\infty)). \tag{4.2}$$

D'autre part, il est démontré dans [4], que pour tout $\phi \in L^\infty$, la suite $\left(\int_0^\infty f_n\,\phi\,dy\right)$ est fortement compacte dans $L^1(\Omega_T)$. Grâce à (4.1) et au lemme de Fatou, il vient alors

$$\int_0^T \int_\Omega D_1(F)\,dxdt \le \liminf_{n\to\infty} \int_0^T \int_\Omega D_1(f_n)\,dxdt = 0. \tag{4.3}$$

De (4.3) on tire $F = 0$ (puisque $0 \le F \in L^p$ et $a > 0$ p.p. sur $\mathbb{R}^2_+$). □

Références.

[1] R.L. Drake, *A general mathematical survey of the coagulation equation*, in "Topics in Current Aerosol Research (part 2)," International Reviews in Aerosol Physics and Chemistry, Pergamon Press, Oxford, 1972, pp. 203–376.

[2] M. Escobedo, Ph. Laurençot, S. Mischler, *On a kinetic equation for coalescing particles*, article soumis

[3] V.A. Galkin, V.A. Tupchiev, *About asymptotic behaviour of solutions of the coagulation equation*, Transactions of the Institute of Experimental Meteorology **19** (1978), 31–41 (in Russian).

[4] Ph. Laurençot, S. Mischler, *The continuous coagulation-fragmentation equations with diffusion*, Arch. Rational Mech. Anal. **162** No 1 (2002), 45-99.

[5] Ph. Laurençot, S. Mischler, *Une introduction à l'analyse des équations de coagulation-fragmentation*, livre en préparation.

[6] James R. Norris, *Smoluchowski's coagulation equation: uniqueness, nonuniqueness and a hydrodynamic limit for the stochastic coalescent*, Ann. Appl. Probab. **9** (1999), no. 1, 78–109.

[7] P.J. O'Rourke, *Collective drop effects on vaporizing liquid sprays*, Ph.D. Thesis, Los Alamos National Laboratory, Los Alamos, NM 87545, November 1981.

[8] J.M. Roquejoffre, P. Villedieu, *A kinetic model for droplet coalescence in dense sprays*, Math. Models Methods Appl. Sci. **11** (2001), no. 5, 867–882.

[9] M. Smoluchowski, *Versuch einer mathematischen Theorie der Koagulationskinetik kolloider Lösungen*, Zeitschrift f. physik. Chemie **92** (1917), 129–168.