Le programme de Kac sur les limites de champ moyen

S. Mischler

23 janvier 2012

Dans ces notes nous exposons quelques résultats mathématiques classiques et nouveaux concernant les "limites de champ moyen" en théorie cinétique des gaz établis dans [17, 16, 15, 10]. Rappelons qu'établir une "limite de champ moyen" consiste à obtenir un modèle sur la densité statistique de particules en partant d'une famille de modèles décrivant un système composé de N particules et en passant à la limite lorsque N tend vers l'infini.

1 Quelques résultats classiques

Nous présentons succinctement plusieurs résultats classiques dont nous discuterons et que généraliserons dans la suite de ces notes.

1.1 EDO et équation de Vlasov

Commençons par le modèle le plus simple. Dans $E = \mathbb{R}^d$, on considère un système de N particules identiques en interaction déterministe dont la position $X = (x_1, ..., x_N) \in E^N$ dans l'espace des phases évolue selon le système d'équations

$$\dot{x}_i = A_i(X), \quad x_i(0) = \text{données}, \quad 1 \le i \le N. \tag{1.1}$$

On suppose que le terme d'interaction A_i s'écrit sous la forme

$$A_i(X) = \frac{1}{N} \sum_{j \neq i} a(x_j - x_i) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} a(x_j - x_i) = (a \star \mu_X^N)(x_i) =: A(x_i, \mu_X^N), \tag{1.2}$$

où $a : E \to E$ est régulier, $a(0) = 0$, et où on a introduit la mesure empirique μ_X^N associée à la configuration X grâce à la relation

$$\mu_X^N := \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \delta_{x_i^N(t)}(dx) \in \mathbf{P}(E), \text{ l'espace des probabilités sur } E.$$

Au niveau statistique, le système de particules est décrit par une densité $f = f(t,x) \in \mathbf{P}(E)$, dont la dynamique est régie par l'équation de Vlasov

$$\partial_t f = Q_V(f) := -\mathrm{div}_x(A(x,f)\, f). \tag{1.3}$$

Introduisons la distance de Monge-Kantorovich-Wasserstein (MKW) entre deux mesures $F, G \in \mathbf{P}(E^\ell)$ définie par

$$W_p(F,G) := \inf_{\pi \in \Pi(F,G)} \left(\int_{E^\ell \times E^\ell} [d_{E^\ell}(X,Y)]^p \, \pi(dX,dY) \right)^{1/p}, \quad p \in [1,\infty).$$

Ici, d_{E^ℓ} désigne la distance (correctement normalisée) de E^ℓ définie par

$$\forall\, X,Y \in E^\ell \qquad d_{E^\ell}(X,Y) := \frac{1}{\ell} \sum_{i=1}^{\ell} d_E(x_i,y_i),$$

d_E désigne la distance sur E définie par $d_E(x,y) = |x-y| \wedge 1 \ \forall\, x,y \in E$, où $|\cdot|$ est la norme euclidienne, et $\Pi(F,G)$ est l'ensemble des plans de transfert de F sur G

$$\Pi(F,G) := \{\pi \in \mathbf{P}(E^\ell \times E^\ell);\ \pi(A \times E^\ell) = F(A),\ \pi(E^\ell \times A) = G(A)\ \forall\, A\}.$$

Le lien entre le système (1.1) et (1.3) est donné par le résultat suivant.

Théorème 1.1 (Dobrushin) *Pour tout $f_0 \in \mathbf{P}(E)$ et $X_0^N \in E^N$, la solution $X^N(t)$ de* (1.1) *issue de X_0^N et la solution $f(t)$ de* (1.3) *issue de f_0 satisfont*

$$\sup_{[0,T]} W_1(\mu^N_{X^N(t)}, f(t)) \le e^{T\,L} W_1(\mu^N_{X_0^N}, f_0), \tag{1.4}$$

pour une constante $L = L(a)$ et où W_1 désigne la distance MKW dans $\mathbf{P}(E)$.

Ce résultat est démontré dans [6] et est une version "quantitative" des résultats antérieurs [18, 2]. Nous renvoyons à [9] pour un (le seul !) résultat établissant la limite de champ moyen pour le modèle de Vlasov dans le cas d'un champ de vecteurs a singulier.

Afin de préparer la discussion que nous engagerons par la suite, il est utile de mentionner comment s'interprète ce résultat si on considère initialement une densité aléatoire de particules $F_0^N \in \mathbf{P}_{sym}(E^N)$ et que chaque particule évolue suivant la dynamique déterministe (1.1). Dans ce cas, la densité de particules $F^N(t) \in \mathbf{P}_{sym}(E^N)$ à l'instant $t \ge 0$ du système de N particules est obtenue en transportant F_0^N le long du flot T_t^N défini par $T_t^N(X_0) = X_t$, où (X_t) est la solution de (1.1) issue de X_0. Plus précisément, $F^N(t) := T_t^N \sharp F_0^N$ définie par

$$\forall\, \varphi \in C_b(E^N) \qquad \langle T_t^N \sharp F_0^N, \varphi \rangle := \int_{E^N} \varphi(T_t^N(X_0))\, F_0^N(dX_0),$$

où ici et dans la suite $C_b(E)$ désigne l'espace des fonctions continues et bornées sur un espace métrique E. Maintenant, à $F^N \in \mathbf{P}_{sym}(E^N)$ on associe $\hat{F}^N \in \mathbf{P}(\mathbf{P}(E))$, la loi de la variable aléatoire μ_X lorsque X est une variable aléatoire de loi F^N, par la relation

$$\forall\, \Phi \in C_b(\mathbf{P}(E)) \qquad \langle \hat{F}^N, \Phi \rangle = \int_{E^N} \Phi(\mu^N_X)\, F^N(dX),$$

et on définit la distance de MKW dans $\mathbf{P}(\mathbf{P}(E))$ associée à une distance D sur $\mathbf{P}(E)$ de la même manière que précédemment : pour $\alpha, \beta \in \mathbf{P}(\mathbf{P}(E))$ on pose

$$\mathcal{W}_D(\alpha, \beta) := \inf_{\pi \in \Pi(\alpha,\beta)} \int_{\mathbf{P}(E)\times\mathbf{P}(E)} D(\rho, \eta)\, \pi(d\rho, d\eta),$$

où encore une fois $\Pi(\alpha, \beta)$ désigne l'ensemble des plans de transports entre α et β. En remarquant que $\Pi(\hat{F}^N, \delta_f) = \{\hat{F}^N \otimes \delta_f\}$ et en intégrant l'inégalité (1.4), il vient

$$\sup_{[0,T]} \mathcal{D}_0(F^N(t); f(t)) \le e^{L\,t}\, \mathcal{D}_0(F^N_0; f_0), \tag{1.5}$$

où on a défini $\mathcal{D}_0(G; g) := \mathcal{W}_{W_1}(\hat{G}, \delta_g)$ pour tout $G \in \mathbf{P}(E^N)$, $g \in \mathbf{P}(E)$.

1.2 EDS et équation de McKean-Vlasov

On considère dans ce paragraphe le modèle précédent auquel on ajoute un bruit brownien. Plus précisément, toujours dans $E = \mathbb{R}^d$, on considère un système de particules identiques en interaction dont la dynamique est régie par l'EDS

$$dx_i = A_i(X)\, dt + dB_{it}, \quad x_i(0) = \text{données}, \quad 1 \le i \le N, \tag{1.6}$$

où $A_i(X) = A(x_i, \mu^N_X)$ est définie par (1.2) et B_{it} est une famille de N mouvements browniens indépendants définie dans un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

On introduit la dynamique sur la densité statistique $f(t) \in \mathbf{P}(E)$ qui est dans ce cas régie par l'équation de McKean-Vlasov

$$\partial_t f = Q_{MV}(f) := -\mathrm{div}(A(x, f)\, f) + \frac{1}{2}\Delta f, \quad f(0) = f_0\, \text{donnée}. \tag{1.7}$$

On introduit enfin une dynamique auxiliaire définie par

$$dy_i = A(y_i, f)\, dt + dB_{it}, \quad y_i(0) = \text{données}, \quad 1 \le i \le N, \tag{1.8}$$

où f est la solution de (1.7) associée à f_0 et les B_{it} sont les mêmes mouvements browniens que dans (1.6).

Théorème 1.2 (Sznitman) *Soient $F^N_0 \in \mathbf{P}_{sym}(E^N)$ et $X^N_0 \in E^N$ une variable aléatoire de loi F^N_0, soient $f_0 \in \mathbf{P}(E)$ et $Y^N_0 \in E^N$ une variable aléatoire de loi*

$f_0^{\otimes N}$. La solution $X^N(t)$ de (1.6) issue de X_0^N et la solution $Y^N(t)$ de (1.8) issue de Y_0^N et associée à f_0 satisfont

$$(1.9)\qquad \sup_{[0,T]} \mathbb{E}\Big(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N |x_i(t)-y_i(t)|\Big) \le C_T\left(\mathbb{E}\Big(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N |x_i(0)-y_i(0)|\Big)+\frac{1}{\sqrt{N}}\right)$$

pour une constante C_T, et où $\mathbb{E}$ désigne l'espérance associée à $\mathbb{P}$.

En particulier, en prenant dans (1.9) l'infimum par rapport à tous les couplages possibles (X_0^N, Y_0^N) on obtient

$$(1.10)\qquad \sup_{[0,T]} \mathcal{D}_N(F^N(t); f(t)) \le C_T\left(\mathcal{D}_N(F_0^N; f_0)+\frac{1}{\sqrt{N}}\right),$$

où on a posé $\mathcal{D}_N(G; g) := W_1(G, g^{\otimes N})$ pour tout $G \in \mathbf{P}(E^N)$, $g \in \mathbf{P}(E)$.

Le théorème 1.2 est démontré dans [22]. On renvoie aux travaux de F. Malrieu et aux articles qui y sont cités pour des résultats récents concernant ce modèle de McKean-Vlasov.

1.3 Système de Boltzmann-Kac et équation de Boltzmann

On s'intéresse maintenant au modèle de Kac qui apparaît dans un article fameux [12] datant 1956 dans lequel la problématique des "limites de champ moyen" est introduite pour la première fois ainsi que le concept de "propagation du chaos". On considère un système de particules qui interagissent par "sauts collisionnels binaires" sensé être une caricature d'une vraie dynamique déterministe collisionnelle. Plus précisément, on considère un système de N particules identiques dont la vitesse $V = (v_1, ..., v_N) \in E^N$, dans l'espace des phases, évolue selon la règle heuristique suivante :

- pour tout couple $(i', j') \in \{1, ..., N\}^2$ on tire un temps alétaoire de collision $T_{i',j'}$ selon une loi exponentielle de paramètre $B(|v_{i'} - v_{j'}|)$ et on sélectionne (i, j) le couple de vitesses avant collision correspondant au temps minimal $T_{i,j} \le T_{i',j'}$ $\forall\, i', j'$;

- on tire au hasard un "angle" de collision $\sigma \in \mathbb{S}^{d-1}$ suivant la loi $b(\cos\theta)$, $\cos\theta = \sigma\cdot(v_i - v_j)/|v_i - v_j|$, et on définit les vitesses après collision (v_i', v_j') par

$$(1.11)\qquad v_i' = \frac{v_i+v_j}{2} + \frac{|v_j - v_i|}{2}\,\sigma, \qquad v_j' = \frac{v_i+v_j}{2} - \frac{|v_j - v_i|}{2}\,\sigma.$$

- après cette collision, la nouvelle vitesse est $V_{ij}' := (v_1, ..., v_i', ..., v_j', ..., v_N)$.

En répétant ce procédé (et en changeant d'échelle de temps), on construit un processus de Markov dont la loi F_t^N est régie par l'équation de Kolmogorov

$$(1.12)\qquad \partial_t \langle F_t, \varphi\rangle = \langle F_t^N, \Lambda^N \varphi\rangle \qquad \forall\, \varphi \in C_b(E^N)$$

où le générateur Λ^N est donné par

$$(1.13) \qquad \Lambda^N = \frac{1}{N} \sum_{i,j=1}^N \Lambda^N_{ij} \qquad (\Lambda^N_{ij}\varphi)(V) = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \mathcal{B}(v_i - v_j, \sigma) \, [\varphi'_{ij} - \varphi] \, d\sigma,$$

avec $\varphi = \varphi(V)$, $\varphi'_{ij} = \varphi(V'_{ij})$, $\mathcal{B}(v_i - v_j, \sigma) = B(|v_i - v_j|) \, b(\cos\theta)$. On supposera ici que $\mathcal{B}$ correspond à l'une des trois sections efficaces suivantes :

- **(MG)** molécules maxwelliennes avec cut-off de Grad : $B = 1$, $b = 1$;
- **(M)** molécules maxwelliennes sans cut-off : $B = 1$, $b \notin L^1$;
- **(SD)** sphères dures : $B(z) = |z|$, $b = 1$.

D'autre part, on introduit la dynamique sur la densité statistique $f(t) \in \mathbf{P}(E)$ qui est régie par l'équation de Boltzmann (homogène en espace)

$$(1.14) \qquad \partial_t f = Q_B(f) := \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \mathcal{B}(v - v_*, \sigma) \, (f' \, f'_* - f \, f_*) \, d\sigma dv_*,$$

$f(0) = f_0$ donnée, où v' et v'_* sont définis grâce à (1.11) à partir de v, v_* et σ.

Définition 1.3 *Etant donnée une probabilité $G \in \mathbf{P}_{sym}(E^N)$ on définit sa j-ième marginale $G_j \in \mathbf{P}_{sym}(E^j)$, $1 \le j \le N$, en posant $G_j(A) := G(A \times E^{N-j})$ pour tout borélien A de E^j. On dit qu'une suite (F^N) de $\mathbf{P}_{sym}(E^N)$ est f-Kac chaotique (ou simplement f-chaotique), $f \in \mathbf{P}(E)$, si pour tout $j \ge 1$ fixé, on a*

$$F^N_j \rightharpoonup f^{\otimes j} \quad \textit{faiblement dans } \mathbf{P}(E^j).$$

Le lien entre ces deux dynamiques est donné par le résultat "de propagation du chaos" :

Théorème 1.4 (Kac, McKean, Graham et Méléard) *On suppose* **(MG)***. Soit $F^N_0 \in \mathbf{P}_{sym}(E^N)$ et $F^N(t)$ la solution de* (1.12)-(1.13) *issue de F^N_0. Soit $f_0 \in \mathbf{P}(E)$ et $f(t)$ la solution de* (1.14) *issue de f_0.*

(1) Si F^N_0 est f_0-chaotique, alors F^N_t est $f(t)$-chaotique.

(2) Plus précisément, si $F^N_0 = f_0^{\otimes N}$, alors pour tout $1 \le \ell \le N$

$$\sup_{t \in [0,T]} \mathcal{D}_\ell(F^N(t); f(t)) \le \frac{C_{\ell,T}}{N},$$

où on a posé $\mathcal{D}_\ell(G; g) := W_1(G_\ell, g^{\otimes \ell})$ pour tout $G \in \mathbf{P}(E^N)$, $g \in \mathbf{P}(E)$.

Le résultat (1) est dû à Kac [12] pour le modèle appelé "caricature de Kac" et à McKean [13] pour le modèle **(MG)**. Le résultat (2) est établi explicitement dans Graham et Méléard [7], voir également [14]. A chaque fois les preuves reposent sur une description précise/explicite des suites de collisions à l'aide d'une représentation "en arbre" (fomule de Wild dans [12, 13], arbres aléatoires dans [13]) et sont donc spécifiques au modèle **(MG)** . Sans utiliser de formulation explicite Grünbaum [8] redémontre (1) et Peyre [20] obtient une variante de (2).

Une première question posée par Kac est celle de savoir si son résultat peut s'étendre à un modèle plus "physique" que celui qu'il considère. Une réponse affirmative est donnée par Sznitman dans [21] qui démontre par une méthode de martingale non linéaire (que nous ne présenterons pas ici) le point (1) du Théorème 1.4 pour le modèle **(SD)**.

La deuxième question largement discutée dans [12], et qui était peut-être la motivation initiale de Kac, est celle d'obtenir le "théorème H" de Boltzmann pour les solutions de l'équation (1.14) non linéaire à partir de familles de fonctionelles de Liapounov pour l'équation (1.12)-(1.13) en grande dimension mais linéaire, et mieux, d'obtenir le temps de relaxation de l'équation (1.14) à partir d'un possible temps de relaxation uniforme en N pour (1.12)-(1.13). Afin d'accomplir ce programme, Kac propose d'étudier la famille des trous spectraux dans L^2 associée à (1.12)-(1.13). Dans cette direction citons le résultat suivant.

Théorème 1.5 *On suppose* **(MG)** *et on note σ_N la mesure uniforme sur la sphère $\mathbb{S}_N$ de E^N centrée et de rayon $\sqrt{N}$. Il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $N \geq 1$*

$$\Delta_N := \inf\{ -\langle h, \Lambda^N h\rangle_{L^2},\ \langle h, 1\rangle_{L^2} = 0,\ \|h\|^2_{L^2}\} \geq \delta > 0,$$

où $\langle\cdot,\cdot\rangle_{L^2}$ et $\|\cdot\|_{L^2}$ correspondent au produit scalaire et à la norme de $L^2(\mathbb{S}_N; d\sigma_N)$. En particulier, pour tout $F_0^N = h_0\,\sigma_N \in \mathbf{P}_{sym}(E^N)$, $h_0 \in L^2$, la solution F^N de (1.12)-(1.13)*, s'écrit $F^N = h(t)\,\sigma_N$ et*

$$\|h^N(t) - 1\|_{L^2} \leq e^{-\delta t}\, \|h_0^N - 1\|_{L^2}. \tag{1.15}$$

Le Théorème 1.5 a été établi par Janvresse pour le modèle de Kac et par Carlen, Carvalho, Loss [4] pour le modèle **(MG)**. Il se trouve que le théorème 1.5 ne donne pas de réponse au deuxième problème posé par Kac. En effet, pour une suite $F_0^N = h_0^N\,\sigma_N$ qui est f_0-chaotique , on a "naturellement" $\|h_0^N - 1\|_{L^2} \geq A^N$, avec $A > 1$, de sorte qu'il faudra attendre un temps proportionnel à N avant que la borne (1.15) implique une convergence vers l'équilibre.

Plus récemment, la question du trou spectral associé à l'entropie (qui est une fonctionnelle mieux adaptée à une limite $N \to \infty$) a été étudiée. En définissant

$$\Delta'_N := \inf\{ -\langle (\log G)/N, \Lambda^N G\rangle / H(G)\}, \qquad H(G) := \frac{1}{N}\int_{E^N} G \log G,$$

il est démontré que $\Delta'_N \geq 1/N$ dans [25] et $\limsup \Delta'_N = 0$ dans [3]. La borne inférieure n'étant pas uniforme en N, ces résultats ne permettent pas de répondre à la deuxième question de Kac.

1.4 Limite de champ moyen par hiérarchie BBGKY

La hiérarchie BBGKY a été utilisée avec succès par Lanford en 1974 pour démontrer la "limite de Boltzmann-Grad" (qui n'est pas une limite de champ moyen à proprement parler) et obtenir ainsi l'équation de Boltzmann non homogène en espace comme limite d'une dynamique portant sur N particules lorsque $N \to \infty$. Il n'est pas question ici de présenter le résultat de Lanford. Nous allons plutôt illustrer cette approche à partir de nos trois modèles présentés ci-dessus. En premier lieu, il convient de remarquer que si on s'intéresse à la densité de particules $F(t) \in \mathbf{P}_{sym}(E^N)$ alors son évolution est régie par l'équation de Liouville-Kolmogorov

$$\partial_t F^N = \Omega^N F^N, \tag{1.16}$$

où $\Omega^N = (\Lambda^N)^* = \Lambda^N$ pour le modèle de Boltzmann-Kac et

$$\Omega^N F = \sum_{i=1,\dots,N} \mathrm{div}_{x_i}(A_i(X)\,F) + \frac{\nu}{2} \sum_{i=1,\dots,N} \Delta_{x_i}$$

avec $\nu = 0$ pour le modèle de Vlasov et $\nu = 1$ pour le modèle de McKean-Vlasov.

En deuxième lieu, pour chacun de ces modèles, il existe un opérateur Ω^N_{j+1} de $\mathbf{P}(E^{j+1})$ dans $\mathbf{P}(E^j)$ tel que lorsqu'on intègre l'équation (1.16) par rapport aux $N-j$ dernières variables, on obtient la famille d'équations

$$\partial_t F^N_j = (\Omega^N F^N)_j = \Omega^N_{j+1}\, F^N_{j+1} \qquad \forall\, 1 \le j \le N. \tag{1.17}$$

Le fait que $(\Omega^N F^N)_j$ s'écrive comme une fonction de F^N_{j+1} provient de ce que les interactions entres particules sont (au plus) binaires.

La preuve de la limite de champ moyen en passant par la hiérarchie BBGKY se fait selon les trois étapes suivantes :

Etape 1. Compacité/Convergence. On montre que F^N_1 est bornée dans $\mathbf{P}_k(E)$, $k > 0$, assez grand de sorte que d'une part pour tout $j \ge 1$ fixé on a $F^N_j \rightharpoonup \pi_j$ faiblement dans $\mathbf{P}_{sym}(E^j)$. On montre que "$\Omega^N_j \to \Omega^\infty_j$", pour un certain opérateur Ω^∞_j de $\mathbf{P}(E^{j+1})$ dans $\mathbf{P}(E^j)$, de sorte que de plus $\Omega^N_{j+1}\, F^N_{j+1} \rightharpoonup \Omega^\infty_{j+1}\, \pi_{j+1}$ faiblement dans $\mathbf{P}(E^{j+1})$. En passant à la limite dans (1.17) on obtient que la suite $(\pi_j)_{j\ge 1}$ de $\mathbf{P}_{sym}(E^j)$ est compatible (au sens où la j-ième marginale de π_{j+1} est π_j) et est solution de la hiérarchie d'équations (BBGKY)

$$\partial_t \pi_\ell = \Omega^\infty_{j+1}\, \pi_{\ell+1}. \tag{1.18}$$

Etape 2. Consistence. On remarque que si $f(t)$ est solution de l'équation non linéaire "de champ moyen" alors $\bar\pi_j(t) = f(t)^{\otimes j}$ est solution de (1.18), ce qui résulte de la "consistance" de l'opérateur Ω^∞ vis-à-vis de l'opérateur non linéaire Q.

Etape 3. Unicité. On démontre qu'il y a unicité de la solution (1.18), c'est l'étape difficile de la méthode.

En combinant ces trois étapes, on obtient que si $F^N_j(0) \rightharpoonup f_0^{\otimes j}$ lorsque $N \to \infty$ pour tout $j \ge 1$, alors $F^N_j(t) \rightharpoonup f(t)^{\otimes j}$ lorsque $N \to \infty$ pour tout $j \ge 1$.

Des théorèmes d'unicité pour la hérarchie BBGKY ont été obtenus par Pulvirenti, Spohn et Wick dans le début des années 1980 pour le modèle de Vlasov et par Arkeryd, Caprino, Ianiro [1] pour le modèle de Boltzmann **(SD)**. En particulier, ce dernier résultat donne une preuve alternative à la preuve de Sznitman [21] de la limite de champ moyen du système de Boltzmann-Kac **(SD)**.

1.5 Le théorème de Hewitt et Savage

Le théorème de Hewitt et Savage est historiquement important, il fait le lien entre les familles compatibles de mesures symétriques et les mesures de mélange.

Théorème 1.6 ([11]). *Soit $(\pi_j)_{j\geq 1}$ une suite de $\mathbf{P}(E^j)$. Il y a équivalence entre*

- *$(\pi_j)_{j\geq 1}$ est symétrique et compatible ;*
- *il existe $\hat\pi \in \mathbf{P}(\mathbf{P}(E))$ telle que $\pi_j = \displaystyle\int_{\mathbf{P}(E)} \rho^{\otimes j}\,\hat\pi(d\rho) \quad \forall\, j \geq 1$.*

Dans le domaine des limites de champ moyen les applications du Théorème 1.6 sont multiples. Il permet de traiter des situations dans lesquelles il peut y avoir "mélange" (il n'y a pas "chaos"), ou pour lesquelles on ne sait pas l'exclure a priori, ce qui est le cas lorsqu'on étudie des limites de mesures de Gibbs en physique statistique à l'équilibre. Le Théorème 1.6 est également utilisé dans les preuves classiques de comparaison des convergences suivantes pour une suite (F^N) de $\mathbf{P}(E^N)$, (F_1^N) bornée dans $\mathbf{P}_k(E)$, $k > 1$, et $f \in \mathbf{P}_k(E)$:

$$F_1^N \rightharpoonup f \text{ faiblement lorsque } N \to \infty; \tag{1.19}$$

$$H(f) \leq \liminf H(F^N); \tag{1.20}$$

$$(F^N) \text{ est } f-\text{chaotique}; \tag{1.21}$$

$$W_1(F_2^N, f^{\otimes 2}) \to 0 \text{ lorsque } N \to \infty; \tag{1.22}$$

$$W_1(F_k^N, f^{\otimes k}) \to 0 \text{ lorsque } N \to \infty \quad \forall\, k \geq 1; \tag{1.23}$$

$$\hat F^N \rightharpoonup \delta_f \text{ faiblement dans } \mathbf{P}(\mathbf{P}(E)) \text{ lorsque } N \to \infty; \tag{1.24}$$

$$W_1(F^N, f^{\otimes N}) \to 0 \text{ lorsque } N \to \infty; \tag{1.25}$$

$$F_1^N \rightharpoonup f \text{ et } H(F^N) \to H(f) \text{ lorsque } N \to \infty. \tag{1.26}$$

Il est connu que les convergences (1.21), (1.22), (1.23) et (1.24) sont équivalentes entre elles, qu'elles sont impliquées par (1.25) ou (1.26), et qu'elles entraînent (1.19) et (1.20).

1.6 Discussion

Dans la suite de ces notes nous allons aborder les questions suivantes et donner quelques éléments de réponses.

1. Peut-on comparer de manière plus précise les différentes convergences (1.21)–(1.26) ? Peut-on comparer de manière quantitative les convergences équivalentes (1.21)–(1.24) ? Nous traitons ces questions dans le paragraphe 2 dans lequel nous présentons un résultat de comparaison des mesures du chaos qui entraîne en particulier l'équivalence des convergences (1.21)–(1.25), à noter que l'implication "(1.21) implique (1.25)" est nouvelle. Nous comparons également le chaos au sens de Kac avec des notions plus fortes et plus récentes de chaos.

2. Peut-on avoir le même type d'inégalité (1.5) et (1.10) pour le modèle de Boltzmann-Kac ? Peut-on traiter par la même méthode les trois modèles, et donc des combinaisons de processus de dérive, diffusion et sauts ? Peut-on généraliser ces estimations quantifiées au cas d'un modèle “physique” (Maxwell sans cut-off et sphères dures), ce qui est la première question de Kac ? Nous répondrons positivement à ces trois questions dans le paragraphe 3.

3. Peut-on avoir une estimation uniforme en temps et peut-on répondre à la deuxième question de Kac concernant un temps de relaxation vers l'équilibre uniforme en N ? Egalement au paragraphe 3, nous donnerons une réponse positive à ces deux questions avec toutefois des taux sûrement moins bons que ceux que l'on pourrait espérer.

4. Peut-on comparer la méthode de la hiérarchie BBGKY avec les méthodes quantitatives de limite de champ moyen ? Dans le paragraphe 4, nous expliquerons pourquoi la méthode introduite au paragraphe 3 est d'une certaine manière une “version quantitative” de la méthode de la hiérarchie BBGKY.

2 Les mesures du chaos

Dans ce paragraphe, pour simplifier la présentation, on prend $E = \mathbb{R}^d$ muni de la distance $d_E(x,y) := |x-y| \wedge 1$. Pour $f \in \mathbf{P}(E)$, $k \in (0,\infty)$, on note $M_k(f)$ le moment d'ordre k de f. Notre premier résultat est une comparaison “quantifiée” des différentes mesures du chaos au sens de Kac.

Théorème 2.1 *Il existe $\gamma, \alpha \in (0,1)$ tels que pour tout $i, j \in \{0, 2, ..., N\}$ et tout $G^N \in \mathbf{P}_{sym}(E^N)$, $G_1^N \in \mathbf{P}_2(E)$, $f \in \mathbf{P}_2(E)$ on a*

$$\mathcal{D}_i(G^N; f) \le C \left(\mathcal{D}_j(G^N; f)^\alpha + \frac{1}{N^\gamma} \right),$$

avec $C := C(M_2(G_1^N), M_2(f))$.

Preuve du Théorème 2.1 : nous en donnons juste les grandes lignes.
Etape 1. On a pour tout $1 \le j \le k \le N$

$$W_1(G_j, f^{\otimes j}) \le 2\, W_1(G_k, f^{\otimes k}).$$

Pour voir cela, il suffit d'introduire la division euclidienne $k = \alpha\, j + r$, $0 \le r \le j-1$, d'écrire $E^k = E^j \times ... \times E^j \times E^r$ et de revenir à la définition des distances W_1.
Etape 2. Il existe deux constantes $C > 0$, $\alpha \in (0,1)$ telles que

$$\mathcal{W}_1(\hat{G}, \delta_f) \le C \left(W_1(G_2, f \otimes f) + \frac{1}{N} \right)^\alpha. \tag{2.1}$$

Pour la preuve de (2.1) on introduit la notation $\pi^N_{\mathbf{P}} G := \hat G$. On commence par écrire l'identité

$$\begin{aligned}\mathcal{W}_{\|\cdot\|^2_{H^{-s}}}(\pi^N_{\mathbf{P}} G, \delta_f) &= (1-\frac{1}{N}) \int_E \left[\tilde G_2 - |\hat G_1|^2\right] \frac{d\xi}{\langle \xi\rangle^{2s}} \\ &+ \int_E [|\hat G_1|^2 - \hat G_1 \,\check f - \check G_1\, \hat f + |f|^2] \frac{d\xi}{\langle\xi\rangle^{2s}} + \frac{1}{N}\int_E \frac{1-|\hat G_1|^2}{\langle\xi\rangle^{2s}}\, d\xi,\end{aligned}$$

où ici (et ici seulement !) on note $\hat h(\xi) := \int_E e^{-i\,v\cdot\xi}\, h(dv)$, $\check h(\xi) := \int_E e^{i\,v\cdot\xi}\, h(dv)$ et $\tilde H(\xi) = \int_{E^2} e^{i\,(v-w)\cdot\xi}\, H(dv,dw)$ pour $h \in \mathbf{P}(E)$ et $H \in \mathbf{P}(E^2)$. Ainsi, pour $s > d/2 + 1/2$, de sorte que $\|f-g\|_{H^{-s}} \le C\, W_1(f,g)$, on a

$$\mathcal{W}_{\|\cdot\|^2_{H^{-s}}}(\pi^N_{\mathbf{P}} G, \delta_f) \le C_{s,d} \Big(W_1(G_2, G_1\otimes G_1) + \|G_1 - f\|^2_{H^{-s}} + \frac{1}{N}\Big). \tag{2.2}$$

De la borne d'interpolation $W_1(f,g) \le C_k\, \|f-g\|^{2\alpha}_{H^{-s}}$, $\alpha \in (0,1/2)$, et de l'inégalité de Jensen dans $\mathbf{P}(E)\times\mathbf{P}(E)$, on déduit que $\mathcal{W}_1(\pi^N_{\mathbf{P}} G, \delta_f) \le [\mathcal{W}_{\|\cdot\|^2_{H^{-s}}}(\pi^N_{\mathbf{P}} G, \delta_f)]^\alpha$ ce qui permet de conclure.

Etape 3. On montre que

$$W_1^\dagger(G,F) \le \mathcal{W}_1(\hat G, \delta_f) + \Omega_f(N) \tag{2.3}$$

où on définit $F := f^{\otimes N}$, $\Omega_f(N) := \mathcal{W}_{W_1}(\hat F, \delta_f)$ et

$$W_1^\dagger(G,F) := \inf_{\pi\in\Pi(G,F)} \int_{E^N\times E^N} W_1(\mu^N_X, \mu^N_Y)\, \pi(dX,dY).$$

En effet, puisque $\Pi(\hat G, \delta_f) = \{\hat G \otimes \delta_f\}$ et $F\otimes G \in \Pi(F,G)$, on a

$$\begin{aligned}\mathcal{W}_1(\hat G, \delta_f) &= \int_{\mathbf{P}(E)} W_1(\rho, f)\, \hat G(d\rho) = \int_{E^N\times E^N} W_1(\mu^N_Y, f)\, F(dX)\, G(dY) \\ &\ge \int_{E^N\times E^N} [W_1(\mu^N_Y, \mu^N_X) - W_1(\mu^N_X, f)]\, F(dX)\, G(dY) \\ &\ge \inf_{\pi\in\Pi(F,G)} \int_{E^N\times E^N} W_1(\mu^N_Y, \mu^N_X)\, \pi(dX,dY) - \int_{E^N} W_1(\mu^N_X, f)\, F(dX) \\ &= W_1^\dagger(F,G) - \mathcal{W}_1(\delta_f, \hat F).\end{aligned}$$

Etape 4. Pour terminer, on montre (et c'est le point crucial)

$$\forall\, F,G \in \mathbf{P}_{sym}(E^N) \qquad W_1(F,G) = W_1^\dagger(F,G). \tag{2.4}$$

On montre seulement $W_1(F,G) \le W_1^\dagger(F,G)$ puisque l'inégalité inverse découle trivialement de l'inégalité $W_1(\mu^N_X, \mu^N_Y) \le d_{E^N}(X,Y)$. Par un argument de densité, que nous ne détaillerons pas, on peut se ramener au cas où E est un ensemble fini de sorte que les mesures F, G et les plans de transport $\pi \in \Pi(F, G)$ peuvent être compris comme des fonctions $E^N \to [0,1]$ et $E^N \times E^N \to [0,1]$ respectivement. On considère $\pi \in \Pi(F, G)$ telle que

$$\int_{E^N \times E^N} W_1(\mu_X^N, \mu_Y^N)\, \pi(dX, dY) = W_1^\dagger(F, G),$$

et comme la fonction $(X, Y) \mapsto W_1(\mu_X^N, \mu_Y^N)$ est invariante par permutation des coordonnées de X et Y, on peut supposer que $\pi \in \mathbf{P}_{sym}(E^{2N})$ au sens où $\pi(X', Y') = \pi(X, Y)$ si $X' \sim X$ et $Y' \sim Y$ où on a défini la relation d'équivalence $\sim$ par $Z \sim Z'$ pour $Z, Z' \in E^N$ s'il existe $\sigma \in \mathfrak{S}_N$ tel que $Z' = Z_\sigma = (z_{\sigma(1)}, ..., z_{\sigma(N)})$. Le problème est résolu si on montre comment définir $\pi^* \in \Pi(F, G)$ telle que

$$\int_{E^N \times E^N} d_{E^N}(X, Y)\, \pi^*(dX, dY) = \int_{E^N \times E^N} W_1(\mu_X^N, \mu_Y^N)\, \pi(dX, dY). \tag{2.5}$$

On désigne par $\mathcal{X} \subset E^N$ (resp. $\mathcal{Y} \subset E^N$) les classes d'équivalence (pour la relation $\sim$) et par $\mathscr{X}$ (resp. $\mathscr{Y}$) l'ensemble de ces classes (où E^N est considéré comme étant respectivement l'espace de la première marginale et de la deuxième marginale). A cause des hypothèses de symétrie, les fonctions F et G sont constantes sur chaque classe et la fonction π est constante sur chaque paire de classes. Plus précisément, pour tout $\mathcal{X} \in \mathscr{X}$, $\mathcal{Y} \in \mathscr{Y}$ et pour tout $X \in \mathcal{X}$, $Y \in \mathcal{Y}$

$$F(X) = F(\mathcal{X})/\sharp\mathcal{X}, \quad G(Y) = F(\mathcal{Y})/\sharp\mathcal{Y}, \quad \pi(X, Y) = \pi(\mathcal{X} \times \mathcal{Y})/(\sharp\mathcal{X}\, \sharp\mathcal{Y}),$$

où dans les termes de droite de ces trois égalités F, G et π sont considérées comme des fonctions d'ensemble et $\sharp$ désigne un cardinal. On en déduit les relations de compatibilité suivantes : pour toutes classes $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ et tout $X \in \mathcal{X}$, $Y \in \mathcal{Y}$

$$F(X) = \sum_{\mathcal{Y}' \in \mathscr{Y}, Y' \in \mathcal{Y}'} \pi(X, Y') = \sum_{\mathcal{Y}' \in \mathscr{Y}} \frac{\pi(\mathcal{X} \times \mathcal{Y}')}{\sharp\mathcal{X}}, \quad G(Y) = \sum_{\mathcal{X}' \in \mathscr{X}} \frac{\pi(\mathcal{X}' \times \mathcal{Y})}{\sharp\mathcal{Y}} \tag{2.6}$$

Pour une paire de classes $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, on définit le réel positif $\delta_{\mathcal{X}\mathcal{Y}} := W_1(\mu_X^N, \mu_Y^N)$ pour un couple (et donc tout couple) $(X, Y) \in (\mathcal{X}, \mathcal{Y})$. Ensuite, pour une paire de classes $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, pour $X \in \mathcal{X}$ et $Y \in \mathcal{Y}$, on définit les ensembles de couples optimaux

$$\mathcal{C}_{\mathcal{X},\mathcal{Y}} := \{(X', Y') \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y};\ d_{E^N}(X', Y') = \delta_{\mathcal{X}\mathcal{Y}}\},$$

$$\mathcal{C}_{X,\mathcal{Y}} := \{Y' \in \mathcal{Y};\ (X, Y') \in \mathcal{C}_{\mathcal{X},\mathcal{Y}}\} \quad \text{et} \quad \mathcal{C}_{\mathcal{X},Y} := \{X' \in \mathcal{X};\ (X', Y) \in \mathcal{C}_{\mathcal{X},\mathcal{Y}}\}.$$

Il est facile de montrer que pour toutes classes $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, on a

$$\forall\, X, X' \in \mathcal{X}\ \ \sharp\mathcal{C}_{X,\mathcal{Y}} = \sharp\mathcal{C}_{X',\mathcal{Y}}, \qquad \forall\, Y, Y' \in \mathcal{Y}\ \ \sharp\mathcal{C}_{\mathcal{X},Y} = \sharp\mathcal{C}_{\mathcal{X},Y'}, \tag{2.7}$$

et que pour tout $X \in \mathcal{X}$, $Y \in \mathcal{Y}$, on a

$$\sharp\mathcal{C}_{X,\mathcal{Y}}\, \sharp\mathcal{X} = \sharp\mathcal{C}_{\mathcal{X},\mathcal{Y}} = \sharp\mathcal{C}_{\mathcal{X},Y}\, \sharp\mathcal{Y}. \tag{2.8}$$

On est maintenant en mesure de définir la probabilité $\pi^* \in \mathbf{P}(E^N \times E^N)$. On pose

$$\begin{aligned}
\pi^*(X,Y) &= \frac{\pi(\mathcal{X}\times\mathcal{Y})}{\sharp\mathcal{C}_{\mathcal{X},\mathcal{Y}}} \text{ si } (X,Y)\in\mathcal{C}_{\mathcal{X},\mathcal{Y}},\\
\pi^*(X,Y) &= 0 \text{ si } (X,Y)\notin \bigcup_{\mathcal{X}\in\mathscr{X},\,\mathcal{Y}\in\mathscr{Y}} \mathcal{C}_{\mathcal{X},\mathcal{Y}}.
\end{aligned}$$

On vérifie alors que $\pi^*\in\Pi(F,G)$ puisque si $X\in E^N$ et $\mathcal{X}$ est la classe de X, on a grâce à (2.8) et (2.6)

$$\begin{aligned}
\pi^*(X\times E^N) &= \sum_{\mathcal{Y}'\in\mathscr{Y},Y'\in\mathcal{Y}'} \pi^*(X,Y') = \sum_{\mathcal{Y}'\in\mathscr{Y}}\sum_{Y'\in\mathcal{C}_{X,\mathcal{Y}'}} \frac{\pi(\mathcal{X}\times\mathcal{Y}')}{\mathcal{C}_{\mathcal{X},\mathcal{Y}'}}\\
&= \sum_{\mathcal{Y}'\in\mathscr{Y}} \sharp\mathcal{C}_{X,\mathcal{Y}'}\,\frac{\pi(\mathcal{X}\times\mathcal{Y}')}{\sharp\mathcal{C}_{X,\mathcal{Y}'}\,\sharp\mathcal{X}} = F(X),
\end{aligned}$$

et de la même manière $\forall\, Y\in E^N$ $\pi^*(E^N\times Y) = G(Y)$. Enfin, on calcule

$$\begin{aligned}
\sum_{X\in E^N,\,Y\in E^N} d_{E^N}(X,Y)\,\pi^*(X,Y) &= \sum_{\mathcal{X}\in\mathscr{X},\,\mathcal{Y}\in\mathscr{Y}}\ \sum_{X\in\mathcal{X},\,Y\in\mathcal{Y}} d_{E^N}(X,Y)\,\pi^*(X,Y)\\
&= \sum_{\mathcal{X}\in\mathscr{X},\,\mathcal{Y}\in\mathscr{Y}}\ \sum_{(X,Y)\in\mathcal{C}_{\mathcal{X},\mathcal{Y}}} \delta_{\mathcal{X},\mathcal{Y}}\,\frac{\pi(\mathcal{X}\times\mathcal{Y})}{\mathcal{C}_{\mathcal{X},\mathcal{Y}}}\\
&= \sum_{\mathcal{X}\in\mathscr{X},\,\mathcal{Y}\in\mathscr{Y}} \delta_{\mathcal{X},\mathcal{Y}}\ \pi(\mathcal{X}\times\mathcal{Y})\\
&= \sum_{\mathcal{X}\in\mathscr{X},\,\mathcal{Y}\in\mathscr{Y}}\ \sum_{X\in\mathcal{X},\,Y\in\mathcal{Y}} W_1(\mu^N_X,\mu^N_Y)\,\pi(X,Y)\\
&= \sum_{X\in E^N,\,Y\in E^N} W_1(\mu^N_X,\mu^N_Y)\,\pi(X,Y),
\end{aligned}$$

ce qui est précisément (2.5). □

Un corollaire du Théorème 2.1 est le résultat suivant qui permet de relier le chaos au sens de Kac, le “chaos entropique” étudié dans [3] et le “chaos au sens de l'infomation de Fisher” que nous introduisons ici. On définit l'information de Fisher d'une probabilité régulière $F\in\mathbf{P}_{sym}(E^N)$, $F_1\in\mathbf{P}_k(E)$, $k>0$, par

$$I(F) := \frac{1}{N}\int_{E^N}\frac{|\nabla F|^2}{F}.$$

Théorème 2.2 *Soit (F^N) une suite de $\mathbf{P}_{sym}(E^N)$ telle que $M_k(F_1^N)$ est bornée avec $k>2$ et $F_1^N \rightharpoonup f$ faiblement dans $\mathbf{P}(E)$.*
Dans cette série d'assertions, chacune implique la suivante.
(i) (F^N) est f-Fisher chaotique, au sens où $I(F^N)\to I(f)$, $I(f)<\infty$;
(ii) $I(F^N)$ est bornée et (F^N) est f-Kac chaotique ;
(iii) (F^N) est f-entropie chaotique, au sens où $H(F^N)\to H(f)$, $H(f)<\infty$;
(iv) (F^N) est f-Kac chaotique.

Idée de la preuve. Le point le plus délicat est d'établir $H(f) \geq \limsup H(F^N)$ afin de montrer que (ii) implique (iii). Pour faire cela, on écrit l'inégalité HWI de [19]

$$H(F^N|\gamma^{\otimes N}) := \frac{1}{N} \int_{E^N} F^N \log \frac{F^N}{\gamma^{\otimes N}} \leq H(f^{\otimes N}|\gamma^{\otimes N}) + W_2(F^N, f^{\otimes N}) \sqrt{I(F^N|\gamma^{\otimes N})},$$

on utilise le fait que l'information relative de Fisher

$$I(F^N|\gamma^{\otimes N}) = \frac{1}{N} \int_{E^N} \left| \nabla \log \frac{F^N}{\gamma^{\otimes N}} \right|^2 \gamma^{\otimes N} = I(F^N) + \int_E \left(2 \frac{\Delta \gamma}{\gamma} + \frac{|\nabla \gamma|^2}{\gamma^2} \right) F_1^N$$

est bornée, et enfin que $W_2(F^N, f^{\otimes N}) \to 0$ grâce au Théorème 2.1. $\square$

3 Quantification du chaos et relaxation uniforme en N

Commençons par une première estimation de propagation du chaos.

Théorème 3.1 *Soit $F_0^N \in \mathbf{P}_{sym}(E^N)$ et $F^N(t)$ la solution de l'équation* (1.16) *associée au modèle de Vlasov, McKean-Vlasov ou Boltzmann-Kac. Soit $f_0 \in \mathbf{P}(E)$ et $f(t)$ la solution de l'équation de champ moyen associée à* (1.3), (1.7) *ou* (1.14)*. Alors pour tout $1 \leq j \leq N/2$, on a*

$$\text{(3.1)} \qquad \sup_{t \in [0,T)} \|F_j^N(t) - f(t)^{\otimes j}\|_{\mathcal{F}_j'} \leq \frac{C_{j,T}}{N^a} + \Theta_{j,T}\Big(\mathcal{W}_{W_1}(\hat{F}_0^N, \delta_{f_0})\Big),$$

avec

- *$T < \infty$ pour les modèles de Vlasov, McKean-Vlasov et Boltzmann-Kac* **(M)**,
- *$T \in (0, \infty]$ pour le modèle de Boltzmann-Kac* **(MG)** *et* **(SD)**,
- *f_0 et F_{01}^N possèdent "suffisamment" de moments bornés, et éventuellement F_0^N satisfait à des contraintes de support,*
- *$\mathcal{F}_j$ est un espace de fonctions régulières de E^j, typiquement $\mathcal{F}_j \subset W^{1,\infty}(E^j)$,*
- *la constante $a \in (0, 1]$ dépend du modèle considéré, ainsi que la constante $C_{T,j}$ et la fonction $\Theta_{j,T}$ qui satisfait $\Theta_{j,T}(s) \to 0$ lorsque $s \to 0$.*

En particulier, si F_0^N est f_0-chaotique alors $F^N(t)$ est $f(t)$-chaotique, et cela de manière quantifiée. De plus, si F_0^N est f_0-entropie chaotique alors $F^N(t)$ est $f(t)$-entropie chaotique.

Soulignons que grâce aux estimations présentées dans la section 2, on peut déduire de la forme précise du Théorème 3.1 (voir [17, 16]) que pour tout temps $T < \infty$ et toute "mesure du chaos" $\mathcal{D} = \mathcal{D}_0$, $\mathcal{D}_2$, ... $\mathcal{D}_N$, il existe une fonction $\Theta_T \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$, $\Theta_T(0) = 0$, telle que

$$\text{(3.2)} \qquad \sup_{t \in [0,T]} \mathcal{D}(F^N(t); f(t)) \leq \Theta_T \left(\frac{1}{N} + \mathcal{D}(F_0^N; f_0) \right).$$

Dans certain cas, on peut prendre $\Theta_T(s) = C_T\, s^\alpha$, $\alpha \in (0,1)$. On étend ainsi les estimations (1.5) et (1.10) au cas des modèles de Boltzmann-Kac et au cas de modèles mixtes de dérive, diffusion et sauts, et on prouve en particulier un résultat quantifié de propagation du chaos pour les modèles "physiques" **(SD)** et **(M)**. On répond ainsi bien à la question 2 formulée dans le paragarphe 1.6. Soulignons toutefois que l'estimation (3.2) obtenue grâce au Théorème 3.1 est moins précise que (1.5) et (1.10).

Nous n'allons pas présenter la preuve du Théorème 3.1 en détail mais seulement quelques idées clés que nous illustrons sur le modèle de Boltzmann-Kac **(MG)**. Cette preuve est en partie inspirée de la preuve de Grünbaum [8], mais elle est aussi beaucoup plus précise et générale. Elle repose sur un argument de dualité. Pour $\varphi \in \mathcal{F}_j$ on décompose le terme à estimer en trois morceaux de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
&\left\langle F_t^N - f_t^{\otimes N}, \varphi \otimes 1^{\otimes N-j} \right\rangle = \\
&\quad = \left\langle F_t^N, \varphi \otimes 1^{\otimes N-j} - R_\varphi(\mu_V^N) \right\rangle \qquad (= T_1) \\
&\quad + \left\langle F_t^N, R_\varphi(\mu_V^N) \right\rangle - \left\langle F_0^N, R_\varphi(S_t^{NL} \mu_V^N) \right\rangle \qquad (= T_2) \\
&\quad + \left\langle F_0^N, R_\varphi(S_t^{NL} \mu_V^N) \right\rangle - \left\langle f_t^{\otimes j}, \varphi \right\rangle \qquad (= T_3)
\end{aligned}$$

où R_φ est le "polynôme" sur $\mathbf{P}(E)$ défini par la relation

$$R_\varphi(\rho) = \int_{E^j} \varphi\, \rho(dv_1) \dots \rho(dv_j)$$

et S_t^{NL} est le semi-groupe non linéaire défini sur $\mathbf{P}(E)$ et associé à l'équation de champ moyen par $g_0 \mapsto S_t^{NL} g_0 := g_t$, g_t solution de l'équation issue de g_0.

Le terme T_1 est facilement borné en C/N grâce à un argument combinatoire classique déjà présent dans [8]. Pour le terme T_3, on écrit un argument similaire à celui qui nous a permis de passer de (1.4) à (1.5), à savoir

$$\begin{aligned}
|T_3| &= \left| \left\langle F_0^N, R_\varphi(S_t^{NL} \mu_V^N) - R_\varphi(S_t^{NL} f_0) \right\rangle \right| \\
&\le [R_\varphi]_{C^{0,1}_{W_1}} \left\langle F_0^N, W_2(S_t^{NL} \mu_V^N, S_t^{NL} f_0) \right\rangle \\
&\le j \, \|\nabla \varphi\|_{L^\infty(E^j)}\, C_T \, \left\langle F_0^N, W_2(\mu_V^N, f_0) \right\rangle \\
&\le j \, \|\nabla \varphi\|_{L^\infty(E)}\, C_T \, \mathcal{W}_{W_2}(\hat{F}_0^N, \delta_{f_0}),
\end{aligned} \tag{3.3}$$

où pour une distance D sur $\mathbf{P}(E)$, $W_1 \le D$, on définit

$$[R_\varphi]_{C^{0,1}_D} := \sup_{D(\rho,\eta) \le 1} |R_\varphi(\eta) - R_\varphi(\rho)| \le j \, \|\nabla \varphi\|_{L^\infty}$$

et où on utilise que le flot non linéaire satisfait d'après [**?**]

$$\textbf{(A5)} \qquad W_2(f_t, g_t) \le W_2(f_0, g_0) \quad \forall\, f_0, g_0 \in \mathbf{P}(E).$$

Enfin, on a une borne sur (3.3) grâce au Théorème 2.1.

La borne du terme T_2 est le point clé. On commence par écrire l'identité

$$\begin{aligned}
T_2 &= \left\langle F_0^N, T_t^N(R_\varphi \circ \mu_V^N) - (T_t^\infty R_\varphi)(\mu_V^N)\right\rangle \\
&= \left\langle F_0^N, (T_t^N \pi_N - \pi_N T_t^\infty)\, R_\varphi\right\rangle \\
&= \left\langle F_0^N, \int_0^T T_{t-s}^N\, (\Lambda^N \pi_N - \pi_N \Lambda^\infty)\, T_s^\infty \, ds\, R_\varphi \right\rangle \\
&= \int_0^T \left\langle F_{t-s}^N, (\Lambda^N \pi_N - \pi_N \Lambda^\infty)\, (T_s^\infty\, R_\varphi)\right\rangle ds
\end{aligned}$$

dans laquelle on a

- T_t^N = semi-groupe dual (agissant sur $C_b(E^N)$) de $F_0^N \mapsto F_t^N$;
- T_t^∞ = semi-groupe "pushforward" (agissant sur $C_b(\mathbf{P}(E))$) du semi-groupe non linéaire S_t^{NL} défini par $(T^\infty \Phi)(\rho) := \Phi(S_t^{NL}\rho)$;
- π_N = projection $C(\mathbf{P}(E)) \to C(E^N)$ défini par $(\pi_N \Phi)(V) = \Phi(\mu_V^N)$;
- Λ^N est le générateur de T_t^N et Λ^∞ celui de T_t^∞.

Or il est possible de montrer que

(A1) F_t^N possède autant de moments bornés que l'on souhaite (autant que F_0^N) ;
(A2) $\Lambda^\infty \Phi(\rho) = \langle Q(\rho), D\Phi(\rho)\rangle$ pour tout $\Phi \in C^{1,a}(\mathbf{P}(E), \mathbb{R})$;
(A3) $(\Lambda^N \pi^N \Phi)(V) = \langle Q(\mu_V^N), D\Phi(\mu_V^N)\rangle + \mathcal{O}([\Phi]_{C^{1,a}}/N)\ \forall\, \Phi \in C^{1,a}(\mathbf{P}(E), \mathbb{R})$;
(A4) $S_t^{NL} \in C^{1,a}(\mathbf{P}(E); \mathbf{P}(E))$, et plus précisément

$$\forall\, T \qquad \int_0^T [S_t^{NL}]_{C^{1,a}}\, dt \le C. \tag{3.4}$$

La notion de calcul différentiel sur l'ensemble des probabilités que nous utilisons ici est la suivante. Pour $\tilde{\mathcal{G}}_1, \tilde{\mathcal{G}}_2$ deux ensembles (égaux à $\mathbb{R}$ ou à un sous-ensemble de $\mathbf{P}(E)$), $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2$ deux espaces vectoriels normés tels que $\tilde{\mathcal{G}}_i - \tilde{\mathcal{G}}_i \subset \mathcal{G}_i$, on écrit $\Phi \in C^{1,a}(\tilde{\mathcal{G}}_1, \tilde{\mathcal{G}}_2)$, $\alpha \in (0,1]$, si pour tout $f \in \tilde{\mathcal{G}}_1$ il existe une application linéaire continue $D\Phi(f) : \mathcal{G}_1 \to \mathcal{G}_2$ et pour tout $f, g \in \tilde{\mathcal{G}}_1$ on a pour une constante $[\Phi]_{C^{1,a}}$,

$$\|\Phi(g) - \Phi(f) - \langle D\Phi(f), f - g\rangle\|_{\mathcal{G}_2} \le [\Phi]_{C^{1,a}}\, \|g - f\|_{\mathcal{G}_2}^{1+a}.$$

Dans **(A2)**–**(A4)** il convient donc de préciser à chaque fois la norme considérée (il s'agit ici de normes du type $|T|_s := \sup_{\xi \in \mathbb{R}^d} |\hat{T}(\xi)|/|\xi|^s$ pour $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ une distribution et $\hat{T}$ sa transformée de Fourier) et en fait de restreindre l'ensemble de probabilités considéré (changer $\mathbf{P}(E)$ par un sous-ensemble de probabilités ayant des moments prescrits et/ou bornés). On n'en dira pas plus ici, sinon que grâce à **(A4)** on montre que $T_t^\infty R_\varphi \in C^{1,a}$ et satisfait une estimation du type (3.4), et qu'alors, de cette estimation combinée à **(A1)**–**(A3)**, on déduit que le terme $|T_2|$ est borné par C/N^α, et cela uniformément en T.

Enfin, il nous est possible de répondre à la deuxième question de Kac formulée plus haut.

Théorème 3.2 *Soit $f_0 \in \mathbf{P}(E)$, par exemple régulière, et $F_0^N = [f_0^{\otimes N}]_{\mathbb{S}_N}$ la mesure de probabilité obtenue en "conditionnant à la sphère $\mathbb{S}_N$ la mesure produit $f_0^{\otimes N}$".*

Soit enfin $F^N(t)$ la solution du système de Boltzmann-Kac (1.12)-(1.13). *Il existe une fonction $\varepsilon_1(t)$ telle que $\varepsilon_1(t) \to 0$ et*

$$\sup_N W_1\left(F^N(t), \sigma^N\right) \le \varepsilon_1(t) \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0, \tag{3.5}$$

On considère maintenant le modèle **(MG)**, *et lui seulement. On suppose de plus que $I(f_0) < \infty$ et on note $F^N = h^N(t)\,\sigma^N$ avec $h^N(t) \in L^1(\mathbb{S}_N)$. Alors il existe une fonction $\varepsilon_2(t)$ telle que $\varepsilon_2(t) \to 0$ et*

$$\sup_N \frac{1}{N} \int_{\mathbb{S}_N} h^N(t)\, \log h(t)\, d\sigma^N \le \varepsilon_2(t) \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{3.6}$$

Dans le cas du modèle **(MG)**, *on peut prendre $\varepsilon_i(t) = C_i\, t^{-a_i}$, avec $a_i \in (0,1)$ plutôt proche de* 0 *que de* 1 *!*

Dans le cas du modèle **(MG)**, *l'idée de la preuve est la suivante.* D'une part, grâce à (1.15) on obtient

$$W_1(F^N(t), \sigma^N) \le C\, \|h^N(t) - 1\|_{L^2(S_N)} \le A^N\, e^{-\delta\, t}, \tag{3.7}$$

ce qui donne une première borne pertinente pour des temps grands par rapport au nombre de particules. De plus, en combinant le théorème 3.1 de quantification du chaos (qui est uniforme en temps) et le retour exponentiel vers la gaussienne de la solution $f(t)$ de l'équation de Boltzmann (1.12) issue de f_0 établi dans [5], on obtient aisément pour $\alpha_i \in (0,1)$, $C_i > 0$

$$\forall\, N \ge 4,\ \forall\, t \ge 0 \qquad W_1(F^N(t), \sigma^N)^{1/\alpha_1} \le \frac{C_1}{N^{\alpha_2}} + C_2\, e^{-\lambda\, t}. \tag{3.8}$$

La convergence (3.5) s'en déduit en choisissant (3.7) si $N \le \varepsilon\, t$ et (3.8) si $N \ge \varepsilon\, t$. La convergence (3.6) se déduit de (3.5), de l'inégalité de type HWI [26, Theorem 30.22]

$$H(F^N|\sigma^N) \le I(F^N|\sigma^N)\, \sqrt{W_2(F^N, \sigma^N)}$$

et d'une borne uniforme en $t \ge 0$ et $N \ge 1$ de $I(F^N|\sigma^N)$ que l'on obtient en adaptant un argument de [24].

4 Retour sur la hiérarchie BBGKY

Nous prétendons que le Théorème 3.1 peut être vu comme une version quantifiée de la méthode reposant sur la hiérarchie BBGKY. En effet, des hypothèses très sembables aux hypothèses **(A1)**–**(A5)** rencontrées dans la preuve du Théorème 3.1 (en fait, légèrement plus faibles) permettent d'obtenir un théorème de proagation du chaos sans taux en suivant la démarche décrite dans la section 1.4. Encore une fois nous nous restreignons au modèle de Boltzmann **(MG)**, mais ce que nous allons exposer se généralise sans difficulté aux trois modèles introduits dans la section 1.

Avec les notations de la section 1.4, on introduit la suite d'opérateurs adjoints $\Lambda_j^N := (\Omega_{j+1}^N)^* : C_b(E^j) \to C_b(E^{j+1})$ et l'opérateur $Q^* : C_b(E) \to C_b(E^2)$ à l'aide des relations

$$\langle F, \Lambda_j^N \varphi \rangle := \langle \Omega_{j+1}^N F, \varphi \rangle, \qquad \langle \rho \otimes \rho, Q^*(\psi) \rangle := \langle Q(\rho), \varphi \rangle,$$

pour toute probabilité $F \in \mathbf{P}(E^{j+1})$, $\rho \in \mathbf{P}(E)$ et toute fonction $\varphi \in C_b(E^j)$, $\psi \in C_b(E)$. On suppose que pour tout $\varphi = \varphi_1 \otimes ... \otimes \varphi_j$, $\varphi_i \in C_b(E)$,

$$(\mathbf{A3'}) \qquad \Lambda_j^N \varphi \to \Lambda_j^\infty \varphi := \sum_{i=1}^{j} Q^*(\varphi_i) \prod_{k \neq i} \varphi_k$$

Un premier résultat immédiat est le suivant.

Proposition 4.1 *Sous les hypothèses* (**A1**) *et* (**A3′**), *pour toute suite* (F^N) *de solutions au système* (1.16) *il existe une sous-suite, encore notée* (F^N), *et une suite* (π_j) *telle que* $\pi_j \in C([0,\infty); \mathbf{P}(E^j) - w)$,

$$\forall\, j \geq 1 \quad F_j^N(t) \to \pi_j(t) \quad \textit{faiblement dans } \mathbf{P}(E^j) \textit{ lorsque } N \to \infty,$$

$(\pi_j(t))$ *est une suite compatible de mesures de probabilité et* (π_j) *est solution de la hiérarchie* (1.18) *avec* $\Omega_{j+1}^\infty = (\Lambda_j^\infty)^*$.

Il est important (et immédiat) de noter que si $f(t)$ est une solution de l'équation (1.14) alors $\pi_j := (f(t)^{\otimes j})$ est solution de (1.18). Notons également que l'hypothèse (**A3′**) est très semblable à l'hypothèse (**A3**), mais plus faible puisque la convergence demandée ici correspond à une convergence sur les "fonctions polynômes" de $\mathbf{P}(E)$. Le lien entre Λ_j^∞ et Λ^∞ provient de la relation $R_{\Lambda_j^\infty(\Pi_j^C \Phi)}(\rho) \to (\Lambda^\infty \Phi)(\rho)$ lorsque $j \to \infty$ pour tout $\Phi \in C^{1,a}(\mathbf{P}(E); \mathbb{R})$, $\rho \in \mathbf{P}(E)$, et où on a défini $\Pi_j^C : C_b(\mathbf{P}(E)) \to C_b(E^j)$ par $(\Pi_j^C \Phi)(X) = \Phi(\mu_X^j)$ $\forall\, X \in E^j$.

En s'inspirant de la preuve du résultat de Arkeryd, Caprino, Ianiro [1], nous sommes capables de montrer le théorème d'unicité suivant.

Théorème 4.2 (Unicité pour la hiérarchie BBGKY) *Supposons* (**A2**) *et* (**A4**) *vérifiées. Pour toute donnée initiale* $\hat\pi_0 \in \mathbf{P}(\mathbf{P}(E))$ *il y a équivalence entre*

- $\hat\pi(t) \in \mathbf{P}(\mathbf{P}(E))$ *est défini à l'aide de* $(\pi_\ell(t))_{\ell \geq 1}$ *grâce au Théorème 1.6 de Hewitt-Savage, où* $(\pi_\ell(t))_{\ell \geq 1}$ *est solution de* (1.18) *pour la donnée initiale* $(\pi_{0,\ell})_\ell$, *qui est elle-même associée à* $\hat\pi_0$ *grâce au Théorème 1.6 (appliqué en sens inverse).*
- $\hat\pi(t) \in \mathbf{P}(\mathbf{P}(E))$ *est solution de l'équation posée dans* $\mathbf{P}(\mathbf{P}(E))$

$$(4.1) \qquad \partial_t \hat\pi = \Omega^\infty \hat\pi, \quad \hat\pi(0) = \hat\pi_0,$$

où $\Omega^\infty = (\Lambda^\infty)^*$ *et* Λ^∞ *est défini dans l'énoncé de l'hypothèse* (**A2**).

- $\hat\pi(t) = \bar\pi(t)$, *avec* $\bar\pi(t)$ *défini par*

$$\langle \bar\pi(t), \Phi \rangle := \langle \hat\pi_0, T_t^\infty \Phi \rangle, \quad \forall\, \Phi \in C_b(\mathbf{P}(E)).$$

En particulier, lorsque $\hat{\pi}_0 = \delta_{f_0}$*,* $f_0 \in \mathbf{P}(E)$*, soit donc* $\pi_{0,\ell} = f_0^{\otimes\ell}$*, la solution de* (4.1) *est* $\hat{\pi}_t = \delta_{f_t}$*, et donc la solution de* (1.18) *est* $\pi_\ell(t) = f(t)^{\otimes\ell}$*, où encore une fois* $f(t)$ *désigne la soluton de* (1.14)*.*

On combinant ces deux résultats on en déduit :

Corollaire 4.3 *On fait les hypothèses* (**A1**)*,* (**A2**)*,* (**A3′**)*,* (**A4**)*. On considère* $F_0^N \in \mathbf{P}_{sym}(E^N)$ *et* $F^N(t)$ *la solution du système* (1.16)*. On considère* $f_0 \in \mathbf{P}(E)$ *et* $f(t)$ *la solution de l'équation* (1.14)*. Si* F_0^N *est* f_0*-chaotique, alors* $F^N(t)$ *est* $f(t)$*-chaotique.*

Références

[1] L. Arkeryd, S. Caprino, N. Ianiro, The homogeneous Boltzmann hierarchy and statistical solutions to the homogeneous Boltzmann equation. J. Statist. Phys. 63, 1-2 (1991), 345361.

[2] W. Braun, K. Hepp, The Vlasov dynamics and its fluctuations in the 1/N limit of interacting classical particles. Comm. Math. Phys. 56, 2 (1977), 101113

[3] E. A. Carlen, M. C. Carvalho, J. Le Roux, M. Loss, C. Villani, Entropy and chaos in the Kac model. Kinet. Relat. Models 3 (2010) 85–122.

[4] E. A. Carlen, M. C. Carvalho, M. Loss, Determination of the spectral gap for Kac's master equation and related stochastic evolution. Acta Math. 191 (2003) 1–54.

[5] E. A. Carlen, E. Gabetta, E., G. Toscani, Propagation of smoothness and the rate of exponential convergence to equilibrium for a spatially homogeneous Maxwellian gas. Comm. Math. Phys. 199, 3 (1999), 521546.

[6] R. L. Dobrušin, Vlasov equations. Funktsional. Anal. i Prilozhen. 13, 2 (1979), 4858, 96.

[7] C. Graham, S. Méléard, Stochastic particle approximations for generalized Boltzmann models and convergence estimates. The Annals of Probability 25 (1997) 115–132.

[8] F. A. Grünbaum, Propagation of chaos for the Boltzmann equation. Arch. Rational Mech. Anal. 42 (1971) 323–345.

[9] M. Hauray, P.-E. Jabin, N-particles approximation of the Vlasov equations with singular potential. Arch. Ration. Mech. Anal. 183, 3 (2007), 489524.

[10] M. Hauray, S. Mischler, On Kac's chaos and related problems, work in progress

[11] E. Hewitt, L. J. Savage, Symmetric measures on Cartesian products. Trans. Amer. Math. Soc. 80 (1955), 470501.

[12] M. Kac, Foundations of kinetic theory, Proceedings of the Third Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, 1954–1955, vol. III, University of California Press, Berkeley and Los Angeles (1956) 171–197.

[13] Jr. , H. P. McKean, An exponential formula for solving Boltmann's equation for a Maxwellian gas. J. Combinatorial Theory, 2 (1967) 358–382.

[14] Jr. , H. P. McKean, Fluctuations in the kinetic theory of gases. Comm. Pure Appl. Math. 28, 4 (1975), 435455.

[15] S. Mischler, Introduction aux limites de champ moyen pour des systèmes de particules cours en ligne CEL http ://cel.archives-ouvertes.fr/cel- 00576329/fr/

[16] S. Mischler, C. Mouhot, Kac's Program in Kinetic Theory. Preprint 2011, arXiv.

[17] S. Mischler, C. Mouhot, B. Wennberg, A new approach to quantitative propagation of chaos for drift, diffusion and jump processes. Preprint 2011, arXiv :1101.4727.

[18] H. Neunzert, J. Wick, Theoretische und numerische Ergebnisse zur nichtlinearen Vlasov-Gleichung. In Numerische L ?osung nichtlinearer partiel- ler Differential- und Integrodifferentialgleichungen (Tagung, Math. Forschungsinst., Oberwolfach, 1971). Springer, Berlin, 1972, pp. 159185. Lecture Notes in Math., Vol. 267.

[19] F. Otto, C. Villani, Generalization of an inequality by Talagrand and links with the logarithmic Sobolev inequality. J. Funct. Anal. 173, 2 (2000), 361400.

[20] R. Peyre, Some ideas about quantitative convergence of collision models to their mean field limit. J. Stat. Phys. 136, 6 (2009), 11051130.

[21] A.-S. Sznitman, Équations de type de Boltzmann, spatialement homogènes. Z. Wahrsch. Verw. Gebiete 66 (1984) 559–592.

[22] A.-S. Sznitman, Topics in propagation of chaos. École d'Été de Probabilités de Saint-Flour XIX—1989, Lecture Notes in Math. 1464, 165–251, Springer, Berlin, 1991.

[23] H. Tanaka, Probabilistic treatment of the Boltzmann equation of Maxwellian molecules. Z. Wahrsch. Verw. Gebiete 46, 1 (1978/79), 67105.

[24] C. Villani Fisher information estimates for Boltzmanns collision operator.J. Math. Pures Appl. (9) 77, 8 (1998), 821837.

[25] C. Villani Cercignanis conjecture is sometimes true and always almost true. Comm. Math. Phys. 234, 3 (2003), 455490

[26] C. Villani Optimal transport, Old and new, vol. 338 of Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]. Springer- Verlag, Berlin, 2009.

Stéphane Mischler

Université Paris-Dauphine & IUF
CEREMADE, UMR CNRS 7534
Place du Maréchal de Lattre de Tassigny 75775 Paris Cedex 16
FRANCE

e-mail: mischler@ceremade.dauphine.fr