# LIMITES FLUIDES DE L'ÉQUATION DE BOLTZMANN

22 mars 2012

Diogo Arsénio, Claude Bardos, François Golse

## L'ÉQUATION DE BOLTZMANN, MOLÉCULES MAXWELLIENNES :

$$\boxed{\epsilon\partial_t F_\epsilon + v\cdot\nabla_x F_\epsilon = \frac{1}{\epsilon}\mathcal{B}\left(F_\epsilon, F_\epsilon\right) = \frac{1}{\epsilon}\int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{S}^2}\left(F'_\epsilon F'_{\epsilon,1} - F_\epsilon F_{\epsilon,1}\right)dv_1 d\sigma \qquad {\scriptstyle (t,x,v)\in[0,\infty)\times\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3}}$$

Fluctuations : $\quad F_\epsilon = MG_\epsilon = M(1+\epsilon g_\epsilon) \qquad$ où $M(v) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}e^{-\frac{|v|^2}{2}}$.

$$\boxed{\epsilon\partial_t G_\epsilon + v\cdot\nabla_x G_\epsilon = \frac{1}{\epsilon}\mathcal{Q}\left(G_\epsilon, G_\epsilon\right) = \frac{1}{\epsilon}\int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{S}^2}\left(G'_\epsilon G'_{\epsilon,1} - G_\epsilon G_{\epsilon,1}\right)M_1 dv_1 d\sigma}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\epsilon\partial_t g_\epsilon + v\cdot\nabla_x g_\epsilon &= -\frac{1}{\epsilon}\mathcal{L}(g_\epsilon) + \mathcal{Q}\left(g_\epsilon, g_\epsilon\right)\\ &= -\frac{1}{\epsilon}\int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{S}^2}\left(g_\epsilon + g_{\epsilon,1} - g'_\epsilon - g'_{\epsilon,1}\right)M_1 dv_1 d\sigma + \int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{S}^2}\left(g'_\epsilon g'_{\epsilon,1} - g_\epsilon g_{\epsilon,1}\right)M_1 dv_1 d\sigma\end{aligned}}$$

## NOTATION :

$$\langle\phi\rangle = \int_{\mathbb{R}^3}\phi(v)M(v)dv \qquad\qquad \langle\!\langle\psi\rangle\!\rangle = \int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3\times\mathbb{S}^2}\psi(v,v_1,\sigma)M(v)M(v_1)dvdv_1d\sigma$$

## PROPRIÉTÉS DE $\mathcal{L}$ ET $\mathcal{Q}$ :

(1) L'opérateur linéaire $\mathcal{L}(g)$ est borné sur $L^2(Mdv)$, auto-adjoint, défini positif, Fredholm d'indice zéro et possède un noyau caractérisé par les invariants de collisions

$$\mathrm{Ker}\mathcal{L} = \mathrm{span}\left\{1, v_1, v_2, v_3, |v|^2\right\}.$$

(2) La projection orthogonale (dans $L^2(Mdv)$) est donnée par

$$\Pi g = \langle g\rangle + \langle vg\rangle\cdot v + \left\langle\left(\frac{|v|^2}{3} - 1\right)g\right\rangle\left(\frac{|v|^2}{2} - \frac{3}{2}\right).$$

(3) L'opérateur $\mathcal{L}$ vérifie l'estimation de coercivité

$$\boxed{\|g - \Pi g\|^2_{L^2(Mdv)} \leq C\langle g\mathcal{L}g\rangle.}$$

(4) L'opérateur bilinéaire $\mathcal{Q}(g,h)$ est borné sur $L^2(Mdv)$. C'est-à-dire,

$$\|\mathcal{Q}(g,h)\|_{L^2(Mdv)} \leq C\|g\|_{L^2(Mdv)}\|h\|_{L^2(Mdv)}.$$

(5) Pour tout invariant de collisions $g\in\mathrm{Ker}\mathcal{L}$, on a que

$$\mathcal{Q}(g,g) = \frac{1}{2}\mathcal{L}(g^2).$$

## L'INÉGALITÉ D'ENTROPIE :

$$\boxed{\frac{1}{\epsilon^2}H\left(F_\epsilon|M\right)(t) + \frac{1}{\epsilon^4}\int_0^t\int_{\mathbb{T}^3}\mathcal{E}\left(F_\epsilon\right)(s,x)dxds \leq \frac{1}{\epsilon^2}H\left(F_\epsilon^{\mathrm{in}}|M\right)}$$

L'entropie relative :

$$\boxed{H\left(F_\epsilon|M\right) = H\left(F_\epsilon\right) = \int_{\mathbb{T}^3}\langle h\left(\epsilon g_\epsilon\right)\rangle dx}$$

où $h(z) = (1+z)\log(1+z) - z \geq 0, \forall z \geq -1$.
La dissipation d'entropie :

$$\boxed{\mathcal{E}\left(F_\epsilon\right) = \frac{1}{4}\left\langle\!\!\left\langle\left(G'_\epsilon G'_{\epsilon,1} - G_\epsilon G_{\epsilon,1}\right)\log\left(\frac{G'_\epsilon G'_{\epsilon,1}}{G_\epsilon G_{\epsilon,1}}\right)\right\rangle\!\!\right\rangle \geq \left\langle\!\!\left\langle\left(\sqrt{G'_\epsilon G'_{\epsilon,1}} - \sqrt{G_\epsilon G_{\epsilon,1}}\right)^2\right\rangle\!\!\right\rangle}$$

car $\left(\sqrt{X}-\sqrt{Y}\right)^2 \leq \frac{1}{4}(X-Y)\log\left(\frac{X}{Y}\right), \forall X, Y > 0.$

**PROPRIÉTÉS DE $h(z) = (1+z)\log(1+z) - z$ :**

(1) $h(z)$ est une fonction convexe positive définie sur le domaine $z > -1$, étendue par continuité $h(-1) = 1$ et satisfait la propriété de réflexion $h(|z|) \leq h(z)$.

(2) Elle satisfait, par rapport à $z = 0$, le développement limité $h(z) = \frac{1}{2}z^2 + o(z^2)$.

(3) On a l'inégalité élémentaire $\left(\sqrt{1+z}-1\right)^2 \leq h(z)$.

(4) Sa transformée de Legendre est définie, pour tout $y \in \mathbb{R}$, par $h^*(y) = \sup_{z>-1}(yz - h(z)) = e^y - y - 1$ et satisfait l'homogénéité superquadratique $h^*(\lambda y) \leq \lambda^2 h^*(y)$, pour tout $y \geq 0$ et $0 \leq \lambda \leq 1$.

(5) On a donc l'inégalité de Young, pour tous $y \geq 0$ et $z \geq -1$,

$$\boxed{y|z| \leq h(z) + h^*(y).}$$

**EXISTENCE DE SOLUTIONS RENORMALISÉES (DIPERNA-LIONS) :**

($\varepsilon > 0$ fixé) Pour toute donnée initiale $F_\varepsilon^{\mathrm{in}} \geq 0$, telle que $H\left(F_\varepsilon^{\mathrm{in}}\right) < \infty$, il existe une solution renormalisée $F_\varepsilon \in C\left([0,\infty); L^1_{\mathrm{loc}}\left(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3\right)\right)$ de l'équation de Boltzmann. C'est-à-dire, $F_\varepsilon$ vérifie l'équation renormalisée :

$$\boxed{\begin{aligned}&\varepsilon\partial_t\Gamma\left(G_\varepsilon\right) + v\cdot\nabla_x\Gamma\left(G_\varepsilon\right)\\ &\qquad = \frac{1}{\varepsilon}\Gamma'\left(G_\varepsilon\right)\mathcal{Q}\left(G_\varepsilon, G_\varepsilon\right) = \frac{1}{\varepsilon}\Gamma'\left(G_\varepsilon\right)\int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{S}^2}\left(G_\varepsilon' G_{\varepsilon,1}' - G_\varepsilon G_{\varepsilon,1}\right)M_1 dv_1 d\sigma\\ &\qquad = \tfrac{1}{\varepsilon}\Gamma'\left(G_\varepsilon\right)\textstyle\int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{S}^2}\left(\sqrt{G_\varepsilon' G_{\varepsilon,1}'} - \sqrt{G_\varepsilon G_{\varepsilon,1}}\right)^2 M_1 + 2\sqrt{G_\varepsilon G_{\varepsilon,1}}\left(\sqrt{G_\varepsilon' G_{\varepsilon,1}'} - \sqrt{G_\varepsilon G_{\varepsilon,1}}\right)M_1 dv_1 d\sigma\end{aligned}}$$

pour toute renormalisation $\Gamma(z) \in C^1\left(\mathbb{R}^+\right)$ telle que $|\Gamma'(z)| \leq \frac{C}{\sqrt{1+z}}$.
De plus, $F_\varepsilon$ satisfait l'inégalité d'entropie ainsi que l'équation de conservation de la masse $\varepsilon\partial_t\int_{\mathbb{T}^3} F_\varepsilon dv + \nabla_x \cdot \int_{\mathbb{T}^3} vF_\varepsilon dv = 0$.

**EXISTENCE DE SOLUTIONS DE LERAY DU SYSTÈME DE NAVIER-STOKES-FOURIER INCOMPRESSIBLE :**

Pour toute donnée initiale $\left(u^{\mathrm{in}}, \theta^{\mathrm{in}}\right) \in L^2\left(\mathbb{T}^3; \mathbb{R}^3\times\mathbb{R}\right)$ telle que $\mathrm{div}_x u^{\mathrm{in}} = 0$, il existe une solution faible au sens de Leray $(u,\theta) \in C\left([0,\infty); w\text{-}L^2\left(\mathbb{T}^3;\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}\right)\right) \cap L^2\left([0,\infty); \dot{H}^1\left(\mathbb{T}^3;\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}\right)\right)$ du système de Navier-Stokes-Fourier incompressible :

$$\boxed{\begin{aligned}\partial_t u + \mathrm{div}_x\left(u\otimes u\right) - \nu\Delta_x u = -\nabla_x p, &\quad \mathrm{div}_x u = 0,\\ \partial_t\theta + \mathrm{div}_x\left(u\theta\right) - \kappa\Delta_x\theta = 0, &\quad \nu,\kappa > 0,\end{aligned}}$$

vérifiant l'inégalité d'énergie

$$\boxed{\int_{\mathbb{T}^3}\tfrac{1}{2}\left|u(t)\right|^2 + \tfrac{5}{4}\left|\theta(t)\right|^2 dx + \int_0^t\int_{\mathbb{T}^3}\nu\left|\nabla_x u(s)\right|^2 + \tfrac{5}{2}\kappa\left|\nabla_x\theta(s)\right|^2 dx ds \leq \int_{\mathbb{T}^3}\tfrac{1}{2}\left|u^{\mathrm{in}}\right|^2 + \tfrac{5}{4}\left|\theta^{\mathrm{in}}\right|^2 dx}$$

**LIMITE HYDRODYNAMIQUE, THÉORÈME PRINCIPAL :**

**Théorème.** *Pour tout $\varepsilon > 0$, soit une donnée initiale $F_\varepsilon^{\mathrm{in}} \geq 0$ telle que*

$$\sup_{\varepsilon>0}\frac{1}{\varepsilon^2}H\left(F_\varepsilon^{\mathrm{in}}\right) < \infty$$

*et soit $F_\varepsilon \in C\left([0,\infty); L^1_{\mathrm{loc}}\left(\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3\right)\right)$ une solution renormalisée correspondante.*

*Alors, la famille de fluctuations $g_\varepsilon$ est relativement compacte dans $w$-$L^1_{\mathrm{loc}}\left(dt; w\text{-}L^1\left(dxMdv\right)\right)$ et tout point limite $g_\varepsilon \rightharpoonup g$ est une maxwellienne infinitésimale*

$$g(t,x,v) = v \cdot u(t,x) + \left(\frac{|v|^2}{2} - \frac{5}{2}\right)\theta(t,x)$$

*où $(u,\theta) \in C\left([0,\infty); w\text{-}L^2\left(\mathbb{T}^3;\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}\right)\right) \cap L^2\left([0,\infty); \dot{H}^1\left(\mathbb{T}^3;\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}\right)\right)$ est une solution de Leray du système de Navier-Stokes-Fourier incompressible avec donnée initiale*

$$u^{\mathrm{in}} = w\text{-}\lim_{\varepsilon\to 0} P\left\langle v g_\varepsilon^{\mathrm{in}}\right\rangle,$$
$$\theta^{\mathrm{in}} = w\text{-}\lim_{\varepsilon\to 0}\left\langle\left(\frac{|v|^2}{5} - 1\right) g_\varepsilon^{\mathrm{in}}\right\rangle,$$

*où $P$ dénote le projecteur de Leray sur les champs à divergence nulle.*

### CONSÉQUENCES DU CONTRÔLE DE L'ENTROPIE RELATIVE :

(1) La famille de fluctuations $g_\varepsilon$ est uniformément bornée dans $L^\infty\left(dt; L^1\left(dx\left(1+|v|^2\right)Mdv\right)\right)$.

(2) La famille de fluctuations $g_\varepsilon$ est relativement compacte dans $w$-$L^1_{\mathrm{loc}}\left(dt; w\text{-}L^1\left(dx\left(1+|v|^2\right)Mdv\right)\right)$.

(3) Tout point limite $g$ de $g_\varepsilon$ dans $w$-$L^1_{\mathrm{loc}}\left(dt; w\text{-}L^1\left(dx\left(1+|v|^2\right)Mdv\right)\right)$ appartient à $L^\infty\left(dt; L^2(dxMdv)\right)$ et satisfait

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}\left\langle g(t)^2\right\rangle dx &\le \liminf_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon^2}H(F_\varepsilon)\\ &\le \liminf_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon^2}H(F_\varepsilon^{\mathrm{in}}) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}\left\langle {g^{\mathrm{in}}}^2\right\rangle dx.\end{aligned}$$

(4) Soit $\phi_\varepsilon = \frac{\sqrt{G_\varepsilon}-1}{\varepsilon}$, autrement dit $\sqrt{F_\varepsilon} = \sqrt{M}(1+\varepsilon\phi_\varepsilon)$, ou encore $g_\varepsilon = 2\phi_\varepsilon + \varepsilon\phi_\varepsilon^2$, alors la famille de fluctuations $\phi_\varepsilon$ est uniformément bornée dans $L^\infty\left(dt; L^2(dxMdv)\right)$ et $\phi_\varepsilon \rightharpoonup \frac{1}{2}g$.

### CONSÉQUENCES DU CONTRÔLE DE LA DISSIPATION D'ENTROPIE :

(1) On a la borne uniforme

$$\sup_{\varepsilon>0}\int_0^\infty\int_{\mathbb{T}^3}\left\langle\!\!\left\langle\frac{\left(\sqrt{G_\varepsilon' G_{\varepsilon,1}'} - \sqrt{G_\varepsilon G_{\varepsilon,1}}\right)^2}{\varepsilon^4}\right\rangle\!\!\right\rangle dxds < \infty.$$

(2) A extraction près, on a la convergence faible

$$\frac{\sqrt{G_\varepsilon' G_{\varepsilon,1}'} - \sqrt{G_\varepsilon G_{\varepsilon,1}}}{\varepsilon^2} \rightharpoonup \tilde{q} \in L^2\left(dtdxMM_1dvdv_1d\sigma\right).$$

En particulier, $\tilde{q}$ satisfait les symmetries de collisions et

$$\begin{aligned}\int_0^t\int_{\mathbb{T}^3}\left\langle\!\left\langle\tilde{q}^2\right\rangle\!\right\rangle dxds &\le \liminf_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon^4}\int_0^t\int_{\mathbb{T}^3}\mathcal{E}\left(F_\varepsilon\right)(s,x)dxds\\ &\le \liminf_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon^2}H(F_\varepsilon^{\mathrm{in}}) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}\left\langle {g^{\mathrm{in}}}^2\right\rangle dx.\end{aligned}$$

(3) Si $g$ est un point limite des fluctuations $g_\varepsilon$, alors $g$ est une maxwellienne infinitésimale

$$g(t,x,v) = \rho(t,x) + v\cdot u(t,x) + \left(\frac{|v|^2}{2} - \frac{3}{2}\right)\theta(t,x)$$

où $(\rho,u,\theta) \in L^\infty\left(dt; L^2\left(dx;\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}\right)\right)$.

### CONSÉQUENCES DU CONTRÔLE DE L'ÉQUATION CINÉTIQUE :

(1) Pour tout $\xi(v) \in L^2\left(Mdv\right)$ et tout $t>0$, on a l'estimation de compacité

$$\lim_{y\to 0}\sup_{\varepsilon>0}\int_0^t\int_{\mathbb{T}^3}\left|\left\langle\xi\phi_\varepsilon\right\rangle(t,x+y) - \left\langle\xi\phi_\varepsilon\right\rangle(t,x)\right| dxdt = 0.$$

(2) Si $g$ et $\tilde{q}$ sont des points limites des fluctuations et des intégrands de collisions, respectivement, alors, on a que

$$\int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{S}^2} \tilde{q} M_1 dv_1 d\sigma = \tfrac{1}{2} v \cdot \nabla_x g = \tfrac{1}{2}\left(A : \nabla_x u + B \cdot \nabla_x \theta\right)$$

où

$$A = v \otimes v - \tfrac{|v|^2}{3}\mathrm{Id} \qquad B = \left(\tfrac{|v|^2}{2} - \tfrac{5}{2}\right) v.$$

(3) De plus, en écrivant $\hat{A} = \mathcal{L}^{-1}A$ et $\hat{B} = \mathcal{L}^{-1}B$, on a que

$$\nabla_x \cdot u = 0 \qquad \nabla_x (\rho + \theta) = 0$$

$$\left\langle\!\left\langle \hat{A}\tilde{q} \right\rangle\!\right\rangle = \tfrac{1}{2}\nu \left(\nabla_x u + (\nabla_x u)^T\right) \qquad \left\langle\!\left\langle \hat{B}\tilde{q} \right\rangle\!\right\rangle = \tfrac{5}{4}\kappa \nabla_x \theta$$

$$\int_0^t \int_{\mathbb{T}^3} \nu \left|\nabla_x u(s)\right|^2 + \tfrac{5}{2}\kappa \left|\nabla_x \theta(s)\right|^2 dx ds \leq \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3} \left\langle\!\left\langle \tilde{q}^2 \right\rangle\!\right\rangle dx ds$$

où

$$\nu = \tfrac{1}{10}\left\langle \hat{A} : A \right\rangle \qquad \kappa = \tfrac{2}{15}\left\langle \hat{B} \cdot B \right\rangle.$$