Mecanismos de crecimiento: desde el modelaje hasta el análisis matemático

Stéphane Mischler

Université Paris Dauphine

Este documento desarrolla en una forma un poco más precisa (he añadido algunas notas bibliográficas, he corregido unos erores matemáticos y José R. León tuvo la amabilidad de releer el documento y corregir unos cuantos errores gramaticales y ortográficos, por lo cual le agradezco mucho) una primera charla intitulada **Ecuaciones de coagulación y otras ecuaciones de crecimiento: modelaje y resultados** que presenté durante la conferencia de clausura de la **Jornada del 50to egresado del Doctorado en Matemática de la UCV**, en Caracas Diciembre 2004. Para la segunda charla que di poco después, en el seminario de Analisis de la UCV, intitulada **Pruebas matemáticas para el modelo de fragmentación** remito al lector interesado a un curso (en francés) del quinto año (DEA), que dicté este año y que se puede encontrar en mi pagina web: www.ceremade.dauphine.fr/

Charla 1: modelaje y resultados

El problema: Entender la dinámica *colectiva* o *estadística*, diremos *mesoscópica*, de un sistema de muchas particulas consiste en dar la dinámica individual (la ley dinamica que sigue cada una de las particulas).

El nivel de descripción *mesoscópica* es entonces un nivel intermediario entre el nivel microscópico (descripción de cada una de las particulas) y el nivel *macroscópico* de los observables físicos

Aquí nos interesamos en situaciones en las cuales la variable de **talla** de las particulas es pertinente y más bien central. Es una situación genérica que se encuentra en muchas áreas de aplicaciones: física (coloide, spray), química (polímero), astrofísica (estrella), computación (red informática), finanzas, biología (división celular), ecología, ...

$\neq$ física cinética en la cual la **velocidad** es la variable más pertinente

El primer paso: es definir las variables pertinentes que permiten describir el *estado* de cada particula y identificar los mecanismos/eventos que ocurren.

El secundo paso: es traducir al nivel estadíistico esta realidad microscópica. El nivel formal es simple: basta escribir la ecuación maestra.

Primer paso. Según la situación, las variables pertinentes pueden ser:

1) **talla** / masa / volumen / edad / ... $\quad\rightarrow\quad y \,/\, m \,/\, a \in \mathbf{R}_+ = (0,\infty)$

2) posición en el espacio $\quad\rightarrow\quad x \in \Omega \subset \mathbf{R}^N$

3) velocidad / momentum $\quad\rightarrow\quad v \,/\, p\,(= mv) \in \mathbf{R}^N$

4) carga / número de parásitos / energía interna / ....

5) geometría (...), por ejemplo la elongación.

Se nota ξ la variable que describe el estado de una partícula:

$$\xi = y, \quad \xi = (x,y), \quad \xi = (m,v), \quad \text{o} \quad \xi = (x,m,v), \; ...$$

En lo que sigue identificamos unos mecanismos actuando sobre estas variables

Segundo paso. Describimos el sistema por la densidad $f = f(t,\xi) \geq 0$ de partículas que están en el estado ξ al tiempo $t \geq 0$, y nos interesaremos en la ecuación dando la dinámica colectiva:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t} f(t,\xi) = Q(f(t,.))(\xi) \\ f(0,.) = f_{in} \end{cases}$$

donde Q es un operator que actúa sobre la variable de estado.

Primera parte : modelaje

En primer lugar, se supone que la talla basta para conocer una partícula: al nivel microscópico se puede identificar las partículas por su masa $y > 0$. Describimos unos procesos de *puro crecimiento* (que actuán en la talla).

1. Coagulación. Es el mecanismo por el cual dos partículas se encuentran y se agregan para formar una sola partícula.

$$(y) + (y') \overset{\text{tasa } a}{\longrightarrow} (y + y') \quad \text{proceso de coagulación.}$$

Desde el punto de vista de la física estadística el proceso se resume en

$$1 + 1 \to 1.$$

Todo el mecanismo físico cuyo resultado es la agregación de las partículas (y que puede ser muy complicado) está escondido en la tasa a.
Tipícamente se elige

$$\begin{aligned} a(y, y') &= y^\alpha\,(y')^\beta + y^\beta\,(y')^\alpha, \qquad \alpha \le \beta \in \mathbf{R} \\ &= |y - y'|^\alpha \qquad \alpha \in \mathbf{R} \end{aligned}$$

La tasa propuesta por Smoluchowski (1917) es

$$a(y, y') = (y^{1/3} + (y')^{1/3})\,(y^{-1/3} + (y')^{-1/3})$$

El operator de cuagulación se escribe

$$\begin{aligned} Q(f)(y) = \mathcal{C}(f, f)(y) =& \frac{1}{2} \int_0^y a(y', y - y')\ f(y')\ f(y - y')\ dy' \\ & - \int_0^\infty a(y, y')\ f(y)\ f(y')\ dy' \end{aligned}$$

2. Fragmentación lineal o espontanea. Es el mecanismo por el cual una partícula se rompe en varios pedazos

$$(y) \overset{\text{tasa } b}{\longrightarrow} (y_1) + (y - y_1) \quad \text{fragmentacion binaria}$$
$$(y) \overset{\text{tasa } b}{\longrightarrow} 2\ (y/2) \qquad \text{cell division}$$
$$(y) \overset{\text{tasa } b}{\longrightarrow} (0) + (y) \quad \text{birth process } \ y = \text{edad}$$
$$(y) \overset{\text{tasa } b}{\longrightarrow} (y_1) + ... + (y_k) + ... \quad \text{fragmentación general}$$

de tal forma que la masa se conserva : $\quad y = \sum_k y_k, \;\; y_k \geq 0.$

$b = b(y, y') =$ tasa de obtener $y'(\leq y)$ como resultado de una fragmentación de una partícula de masa y.

$$b(y, y') = B(y)\, \beta(y, y')$$

• $B(y)$ es la frecuencia de un evento de fragmentación
• $\beta(y, y')$ es la "probabilidad" de repartición de las nuevas masas,
con la condición $\displaystyle\int_0^y \beta(y, y')\, y'\, dy' = y.$
Modelo de fragmentación "auto-similar"

$$B(y) = y^\gamma, \;\; \gamma \in \mathbf{R}, \qquad \beta(y, y') = \frac{1}{y}\, \theta\left(\frac{y'}{y}\right), \qquad \int_0^1 z\, \theta(z)\, dz = 1.$$

El operator de fragmentación se escribe

$$Q(f)(y) = \mathcal{L}(f)(y) = \int_y^\infty b(y', y)\, f(y')\, dy' - B(y)\, f(y)$$

3. Fragmentación colisional. Es el mecanismo por el cual partículas al chocar se rompen:

$$(y) + (y') \overset{\text{tasa } a}{\longrightarrow} (y_1) + ... + (y_k) + ... \quad \text{fragmentacion colisional}$$

de tal forma que la masa se conserva : $\quad y + y' = \sum_k y_k, \;\; y_k \geq 0.$

$a = a(y, y', z)$ es la tasa de tener una partícula de talla z como resultado de una fragmentación colisional de partículas de tallas y y y'.

4. Condensación / evaporación. Es el mecanismo por lo cual particulas intercambian *masa* con el ambiente que las rodea de densidad $u \geq 0$, este ambiante está constituido por la misma *materia* que las partículas, pero en una fase distintas (partículas de tamaño $y = 0$).
Dos ejemplos:
- $u =$ fase gaseosa y $f(y) =$ densidad de las gotas de masa y
- $u =$ densidad de monómeros y $f(y) =$ densidad de los polímeros constituidos de y ($>> 1$) monómeros

$$(y) + [u] \overset{\text{tasa } E}{\longrightarrow} (y + E(u, y)\, dy) \quad \text{condensación/evaporación}$$

Ecuación de condensación/evaporación

$$\mathcal{D}_E(f)(y) = -\partial_y(E(u, y)f(y))$$

condensación cuando $E > 0$: la masa de las partículas crece
evaporación cuando $E < 0$: la masa de las partículas decrece

Ecuación de Lifshitz-Slyosov

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t} f + \dfrac{\partial}{\partial y}(E(u, y)\, f) = 0, \qquad E = k(y)\, u - q(y) \\ + \;\text{ una ecuacion en } u = u(t) \end{cases}$$

En segundo lugar, se supone que la talla sola no basta para describir las partículas: se consideran otras variables y se superponen otros mecanismos.

5. Difusión. Las partículas se mueven en el espacio de posiciones según un movimiento Browniano:

$$f = f(t, x, y) \qquad \partial_t f - d(y)\,\Delta_x f = ...$$

6. Transporte. Las partículas se mueven según una direccion fijada V

$$f = f(t, x, y) \qquad \partial_t f + V \cdot \nabla_x f = ...$$

o según la direción de su propria velocidad

$$f = f(t, x, y, v) \qquad \partial_t f + v \cdot \nabla_x f = ...$$

7. Coalesencia cinética. El estado de una partícula es la pareja masa-impulsión $y = (m, p)$ y el evento de coalesencia se escribe

$$(y) + (y') \longrightarrow (y + y') = (m + m', p + p')$$

de tal manera que la masa y la impulsión se conservan.

Muy parecido, aunque distincto, a la ecuación de Boltzmann en la cual el mecanismo microscópico sería

$$(m, p) + (m', p') \longrightarrow (m, p'_*) + (m, p'_*)$$

con p' y p'_* elegido de tal manera que la energía se conserva (Boltzmann elástico)

8. Fricción; 9. Acoplamiento fluido - partículas.

Bibliografía. De una manera general, referimos a los libros o artículos de review de F. Leyvraz [28], P. Laurençot and S. Mischler [27], D.J. Aldous [2], J. H. Seinfield [36], S. K. Friedlander [19], D.L. Drake [9], y a las numerosas citas que se encuentran ahí, en ellos se presenta la física básica de los mecanismos de crecimiento así como un panorama de los principales resultados matemáticos obtenidos hasta ahora, además de unas direcciones de investigación posibles para el futuro.

Direcciones de investigación

A - Modelale ($\Rightarrow$ tener modelos realistas)

Simulación numérica

B - Teoría de existencia

Convergencia de esquema numérico

Modelaje matemático : pasaje riguroso de una descripción microscópica a una descripción mesoscópica y de una descripción mesoscópica a una descripción macroscópica

C - Análisis cualitativo ($\Rightarrow$ para modelos sencillos)

- Leyes de conservación, entropía (funcional de Liapunov) ?
- Soluciones particulares y pertinentes : soluciones estacionarias, soluciones auto-similares ?
- Son estas soluciones estables ? atractivas ?

Los modelos de coagulación y fragmentación proporcionan modelos de **cambio de fase** (= *la fase partículas* **pierde masa**)

$$\text{polvo } y = 0 \quad \longleftrightarrow \quad \text{particulas } y \in (0, \infty) \quad \longleftrightarrow \quad \text{gel } y = \infty$$

aunque al nivel formal, estas ecuaciones conservan la masa.

Segunda parte : resultados

2. Fragmentación lineal.

Se define

$$\dot{L}^1_k := \{f : (0,\infty) \to \mathbf{R};\ \ M_k := \int_0^\infty y^k\, f(y)\, dy < \infty\}.$$

Teorema 1. Suponemos b auto-similar: $b = y^{\gamma-1}\,\theta(y'/y)$ con $\gamma \in \mathbf{R}$, $\theta > 0$ y $\int_0^1 z\,\theta(z)\,dz = 1$.

Para todo dato inicial $0 \le f_{in} \in \dot{L}^1_1$, existe una única solución
$0 \le f \in C([0,\infty); \dot{L}^1_k) \cap L^\infty(0,\infty; \dot{L}^1_1) \cap L^1(0,\infty; \dot{L}^1_{k+\gamma})$
con $k = 1$ cuando $\gamma \ge 0$, $k > 1$ cuando $\gamma < 0$.

Caso $\gamma \ge 0$. Conservación de la masa y concentración en pequeñas partículas

$$M_1(t) = M_1(0) =: \rho \quad \text{y} \quad f(t,y)\,y \ \rightharpoonup\ \rho\,\delta_{y=0}$$

Más precisamente

$$f(e^{\gamma\, t}, y\, e^{-t})\, y\, e^{-2t} \ \underset{t\to\infty}{\longrightarrow}\ G(y)\, y \tag{1}$$

con $0 < G \in W^{1,\infty}_{loc}$, $G(y) \sim e^{-y^\gamma}$ cuando $y \to \infty$.

Caso $\gamma < 0$. Creación de polvo instantáneamente (*Shattering phenomenon*)

$$M_1(t) \quad \text{decrece strictamente hasta 0.}$$

Soporte de $f_{in} \subset [0, A]$ implica $f(t,y)\,y = \rho\,\delta_{y=0}$ en tiempo finito.

Bibliografía. Las referencias históricas son Filipov [14] y McGrady-Ziff [20].
En el campo probabilístico, los procesos de fragmentación han sido estudiado por J. Bertoin y sus estudiantes entre otros, vease [4,6] y las referencias de estos articulos.
En el campo analítico, remitimos a [15,13,7,35], así que al curso [31].

Problemas abiertos.
1. Teoría de existencia L^1 y unicidad en el caso $\int_0^1 z\,\theta(z)\,dz = \infty$ pero $\int_0^1 z^k\,(1-z)^k\,\theta(z)\,dz < \infty$ con $k \in (0,1)$? Un ejemplo típico puede ser $\theta(z) = z^{-1}\,(1-z)^{-1}$.
2. Demostrar (1) cuando $\theta(z) = 2\,\delta_{z=1/2}$ y siempre $\gamma \ge 0$.
3. Escribir una teoría limpia por tecnicas analíticas (del tipo transformacion de Laplace) en lugar de tipo probabilísticas o de análisis funcional.
4. Tasa de convergencia en (1)? Propriedades de G: regularidad, comportamiento en 0 y ∞?
5. Se puede obtener soluciones autosimilares (post-dust) en el caso $\gamma < 0$? Y estudiar el comportamiento cuando $y \to 0$ de las soluciones genéricas.

1. Coagulación.

Teorema 2. Suponems $a = (y\, y')^{\lambda/2}$ con $\lambda \in (0, 2)$.

Para todo dato inicial $0 \le f_{in} \in \dot{L}^1_1$, existe una solución
$0 \le f \in C([0,\infty); \dot{L}^1_{loc}) \cap L^\infty(0,\infty; \dot{L}^1_1) \cap L^2(0,\infty; \dot{L}^1_{1/2+\lambda/2})$

Caso $\lambda < 1$. Conservación de la masa y desaparición de las partículas pequeñas

$$M_1(t) = M_1(0) =: \rho \quad \text{y} \quad f(t,y) \;\rightarrow\; 0$$

Más precisamente

$$g(t,y) := e^{\frac{2\,t}{1-\lambda}} f(e^t, e^{\frac{t}{1-\lambda}}\, y) \quad \text{es acotado en } L^1 \cap \dot{L}^1_2.$$

Para todo ρ existe $G \in C^0$, $M_1(G) = \rho$, $G > 0$, $G \sim_\infty e^{-y}$,
$G \sim_0 y^{-\lambda-1}$ un perfil autosimilar:

$$F(t,y) := t^{-\frac{2}{1-\lambda}}\, G(y\, t^{-\frac{1}{1-\lambda}})$$

es una solución con dato inicial "polvo puro":

$$y\, F(t,y) \underset{t\to\infty}{\rightharpoonup} \rho\, \delta_{y=0}.$$

Se conjectura $g(t,.) \to G$ cuando $t \to \infty$.

Caso $\lambda > 1$. No se conserva la masa (fenómeno de "gelificación"):

$$\exists T_g > 0 \qquad M_1(t) \equiv \rho \;\; \forall\, t < T_g \quad M_1(t) < \rho \;\; \forall\, t > T_g.$$

Al tiempo de gelificación se conjetura

$$y\, f(T_g, y) \underset{y\to\infty}{\sim} y^{-\lambda/2-1/2}$$

Se puede considerar también cuando $\lambda < 1$ la ecuacion con fuente:

$$\partial_t f = \mathcal{C}(f) + \frac{\sigma(t)}{y}\, \delta_{y=0}.$$

Bibliografía. De una manera general remitimos a los dos surveys [27], [28].
El problema de Cauchy ha sido estudiado por Melzak, McLeod, Galkin, Dubovskii, Stewart, Ball-Carr-Penrose, Laurençot, ... Remitimos a [22,23,30,12,10] por los resultados los mas recientes.
El problema de conservación de masa y de pérdida de masa (gelificación) ha sido primero investigado

por White, Leyvraz y Jeon. Remitimos a [12].
La cuestión del perfil al tiempo de gelificación ($\lambda > 1$) o en tiempo infinito ($\lambda < 1$) ha sido estudiado en el campo físico por Van Dongen, Ernst, Ziff, Hendriks, Leyvraz. Remitimos a los artículos recientes [5,13,10,16,17].
El tema de la converegencia de las soluciones genéricas hacia las soluciones auto-similares ha sido estudiado por Kreer-Penrose, da Costa, Aldous, Deaconu-Tanré. Remitimos a [32,33,26].
Tomar en cuenta la fuente "polvo" ha sido investigado en [10].

Problemas abiertos. Muchos problemas quedan abiertos con respecto a la materia de la existencia de un perfil auto-similar en el caso $\lambda > 1$ y de la convergencia hacia este perfil en todos casos.

1. Remitimos a [12] donde se encontrará una lista larga de problemas abiertos con respecto al problema de gelificación.

2. El problema de convergencia ha sido resuelto en el caso $a = 1$ y $a = y + y'$, pero queda abierto en el caso general $\lambda \leq 1$, y aún más cuando $\lambda > 1$.

1 & 2. Coagulación y fragmentación.

Se supone que existe una condición de balance

$$\exists\, F \quad t.q. \quad a(y,y')\,F(y)\,F(y') = b(y+y',y)\,F(y+y') \tag{2}$$

y la fragmentación es binaria. La funcional siguiente es "de Liapunov":

$$H(f) := \int_0^\infty f\,\left(\log\frac{f}{F} - 1\right) + F\,dy \geq 0.$$

En algunos casos muy particulares se puede mostrar:

A. $b >> a$, $b >> 1$: conservación de masa y

$$\exists\, z \qquad f(t,y) \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} F(y)\,z^y, \quad M_1(F(y)\,z^y) = M_1(f_{in}) \tag{3}$$

B. $b \sim a$: conservación de masa y existe ρ_s

- $M_1(f_{in}) \leq \rho_s$ implica (3)
- $M_1(f_{in}) > \rho_s$ implica $f(t,y) \underset{t\to\infty}{\rightharpoonup} F(y)\,z_s^y, \quad M_1(F(y)\,z_s^y) = \rho_s$

fenómeno de saturación: transición de fase en tiempo infinito

C. $b << a$, $\lambda > 1$: se pierde masa en tiempo finito (gelificación)

Bibliografía. Otra vez remitimos al survey [27] para una discusión sobre el problema de Cauchy. Poco es conocido sobre la existencia de equilibrio y el comportamiento asimtótico cuando no se hace la hipotesis de balance (3), vease [18,13].
De una manera general los resultados de tipo A, B, C son demostrados para el modelo dicreto de Becker-Doring (y Becker-Doring generalisado), vease [3] y los trabajos citados en [27,8], pero quedan abiertos en el caso general. La tasa de converencia ha sida obtenida (en el caso A.) en [1,21].
El caso A es accesible para modelos de coagulación continua [24] y con espacio [22].
El caso B es bien entendido solamente por el modelo de Becker-Doring.
Remitimos a [11] para el caso C.
Finalmente, el víinculo entre la ecuación de Becker-Doring y el modelo de Lifshitz-Slyozov ha sido estudiado en [25,34] y en los trabajos citados.

2 & 3. Fragmentación y condesación.

$$\partial_t f + \partial_y f = \mathcal{L}(f)$$

No hay conservación de masa **pero** el problema es lineal.

Teorema 3. • Para todo $\rho > 0$ existe (λ, ϕ, F), aquí $F = F_\rho$, tal que

$$\begin{cases} \partial_y F + \lambda\, F = \mathcal{L} F, & F \geq 0 \\ -\,\partial_y \phi + \lambda\, \phi = \mathcal{L}^* \phi, & \phi > 0 \\ \displaystyle\int_0^\infty F\, \phi\, dy = \rho. \end{cases}$$

• Para todo $f_{in} \geq 0$ existe una solución f "conservativa" (más bien de crecimiento exponencial)

$$\int_0^\infty e^{-\lambda\, t} f(t,y)\, \phi(y)\, dy \equiv \int_0^\infty f_{in}(y)\, \phi(y)\, dy =: \rho$$

y que converge hacia la primera auto-función

$$e^{-\lambda\, t}\, f(t,y) \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} F(y)$$

El punto fundamental es que para todo H convexo

$$t \mapsto \int_0^\infty \phi(y)\, F(y)\, H\left(\frac{f(t,y)}{F(y)}\right) dy$$

es una "entropía" = "funcional de Liapunov".

Bibliografía. Remitimos a [35,29] y trabajos en preparación.

[1] M. Aizenman, T. Bak, *Convergence to equilibrium in a system of reacting polymers*, Comm. Math. Phys., **65**, 203–230 (1979)

[2] D.J. Aldous, *Deterministic and stochastic models for coalescence (aggregation, coagulation): a review of the mean-field theory for probabilists*, Bernoulli **5** (1999) 3–48

[3] Ball, J.M., Carr, J., Penrose, O.: The Becker-Döring cluster equations : basic properties and asymptotic behaviour of solutions. Comm. Math. Phys., **104**, 657–692 (1986)

[4] J. Bertoin, *A fragmentation process connected to Brownian motion*, Probab. Theory Relat. Fields 117, 289-301 (2000)

[5] J. Bertoin, *Eternal solutions to Smoluchowski's coagulation equation with additive kernel and their probabilistic interpretations*, Ann. Appl. Probab. 12 (2002), no. 2, 547–564.

[6] J. Bertoin, *On small masses in self-similar fragmentations*, Stochastic Process. Appl. 109, 13-22 (2004)

[7] J. Bertoin, A.V. Gnedin, *Asymptotic laws for nonconservative self-similar fragmentations* prepublicacion Paris VI

[8] J.A. Cañizo *Asymptotic behavior of solutions to the generalized Becker-Döring equations for general initial data*, prepublicación

[9] R.L. Drake, *A general mathematical survey of the coagulation equation*, Topics in Current Aerosol Research (part 2), International Reviews in Aerosol Physics and Chemistry, Pergamon Press, Oxford (1972) 203–376

[10] M. Escobedo, S. Mischler, *Dust and self-similarity for the Smoluchowski coagulation equation*, prepublicación 2004

[11] M. Escobedo, Ph. Laurençot, S. Mischler, B. Perthame, *Gelation and mass conservation in coagulation-fragmentation models*, J. Differential Equations 195 (2003), no. 1, 143–174.

[12] M. Escobedo, S. Mischler, B. Perthame, *Gelation in coagulation and fragmentation models*, Comm. Math. Phys. **231** (2002) 157–188

[13] M. Escobedo, S. Mischler, M. Rodriguez Ricard, *On self-similarity and stationary problem for fragmentation and coagulation models*, por publicarse en Annales de l'Institut Henri Poincaré.

[14] A. F. Filippov (1961). On the distribution of the sizes of particles which undergo splitting. Th. Probab. Appl. 6, 275-293.

[15] N. Fournier, J.-S. Giet, *On small particles in coagulation-fragmentation equations*, J. Statist. Phys. 111 (2003), no. 5-6, 1299–1329.

[16] N. Fournier, P. Laurençot, *Existence of self-similar solutions to Smoluchoski's coagulation equation*, prepublicación 2004

[17] N. Fournier, P. Laurençot, *Local properties of self-similar solutions to Smoluchowskis coagulation equation with sum kernels*, prepublicación 2004

[18] N. Fournier, S. Mischler *Exponential trend to equilibrium for discrete coagulation equations with strong fragmentation and without a balance condition*, Proc. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci. 460 (2004), no. 2049, 2477–2486.

[19] S. K. Friedlander, *Smoke, Dust and Haze: Fundamentals of Aerosol behavior*, Wiley, New York (1979)

[20] E.D. McGrady, R.M. Ziff, “Shattering” transition in fragmentation. Phys. Rev. Lett., **58**, 892–895 (1987)

[21] P.-E. Jabin, B. Niethammer *On the rate of convergence to equilibrium in the Becker-Döring equations* J. Differential Equations 191 (2003), no. 2, 518–543

[22] Ph. Laurençot, S. Mischler, *The continuous coagulation-fragmentation equations with diffusion*, Arch. Rational Mech. Anal., **162**, 45–99 (2002)

[23] Ph. Laurençot, S. Mischler, *From the discrete to the continuous coagulation-fragmentation equations* Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A, **132**, 1219–1248 (2002)

[24] Ph. Laurençot, S. Mischler, *Convergence to equilibrium for the continuous coagulation-fragmentation equation* Bull. Sci. Math., **127**, 179–190 (2003)

[25] Ph. Laurençot, S. Mischler, *From the Becker-Döring to the Lifshitz-Slyozov-Wagner equations*, J. Statist. Phys., **106**, 957–991 (2002)

[26] Ph. Laurençot, S. Mischler, *Liapunov functionals for Smoluchowski's coagulation equation and convergence to self-similarity*, por publicarse en Monatshefte fur Mathematik

[27] Ph. Laurençot, S. Mischler, *On coalescence equations and related models*, "Modelling and computational methods for kinetic equations", Editors P. Degond, L. Pareschi, G. Russo, in the Series Modeling and Simulation in Science, Engineering and Technology (MSSET), Birkhauser, 2004

[28] F. Leyvraz, *Scaling Theory and Exactly Solved Models In the Kintetics of Irreversible Aggregation* Phys. Reports **383** (2003) Issues 2-3, 95–212

[29] P. Michel, S. Mischler, B. Perthame, *General entropy equations for structured population models and scattering*, C.R. Acad. Sc. Paris série I **338** (2004), 697-702

[30] S. Mischler, M. Rodriguez Ricard, *Existence globale pour l'équation de Smoluchowski continue non homogène et comportement asymptotique des solutions*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., **336**, 407–412 (2003)

[31] S. Mischler, *Une introduction aux modèles de coagulation et fragmentation*, notes de cours de DEA

[32] G. Menon, R.L. Pego, *Approach to self-similarity in Smoluchowski's coagulation equation*, Comm. Pure Appl. Math. 57 (2004), no. 9, 1197–1232

[33] G. Menon, R.L. Pego, *Dynamical scaling in Smoluchowski's coagulation equation: uniform convergence*, prepublicación 2003

[34] B. Niethammer *On the evolution of large clusters in the Becker-Döring model* J. Nonlinear Science, **13**, 115-155 (2003)

[35] B. Perthame, L. Ryzhik *Exponential decay for the fragmentation or cell-division equation*, prepublicación 2003.

[36] J. H. Seinfield, Atmospheric Chemistry and Physics of Air Pollution, John Wiley & Sons, New York 1986.