Systèmes Dynamiques / *Dynamical Systems*.

Perturbation d'un hamiltonien partiellement hyperbolique

Patrick Bernard

Résumé: *La diffusion d'Arnold pour les systèmes hamiltoniens presque intégrables $H(q,p) = H_0(p) + \mu h(q,p)$ se fait en temps exponentiellement grand en μ. On étudie ici un système initialement hyperbolique qui admet une diffusion en temps polynomial.*

Perturbation of a partially hyperbolic hamiltonian system

Abstract: *Arnold's diffusion in quasi integrable hamiltonian systems $H(q,p) = H_0(p) + \mu h(q,p)$ occurs in exponentially large time. We study an initially hyperbolic system which admits diffusion in polynomial time.*

Abridged english version

In spite of KAM theorem, quasi integrable hamiltonian systems need not be stable. In [1], V.I. Arnold has pointed out an unstable behavior for systems with more than three degrees of freedom. Such systems can admit orbits satisfying $|p(t_1) - p(t_0)| \geq 1$. Arnold's example can be expressed as a lagrangian depending on two parameters:

$$\mathcal{L}_{\epsilon,\mu}(q,\dot{q},Q,\dot{Q},t) = \frac{1}{2}\dot{Q}^2 + \frac{1}{2}\dot{q}^2 + \epsilon(1-\cos q) + \epsilon\mu(1-\cos q)(\cos Q + \cos t).$$

The first perturbation $\mathcal{L}_{\epsilon,0}$ preserves a family of invariant tori $\mathbf{T}_\omega$ ($\dot{q} = q = \dot{Q} - \omega = 0$) and makes them partially hyperbolic. The second perturbation creates connections between these " whiskered" tori. There now exists unstable orbits sliding along these connections. In a recent paper [2] U. Bessi gives a variationnal proof of this result. He obtains an estimate of the smallest time t_d for which $|\dot{Q}(t_d) - \dot{Q}(0)| \geq 1$: for ϵ small enough and $\mu \leq e^{-a/\epsilon}$, $t_d \leq e^{c/\sqrt{\epsilon}}$. We recall that this time must be exponentially high in ϵ as was proved in [3]. In both these methods partial hyperbolicity of $\mathbf{T}_\omega$ is essential. That's why it seems useful to study initially hyperbolic systems for which diffusion, though much quicker and easier to point out, is not completely understood. Following a suggestion by P. Lochak, I will study the example

$$\mathcal{L}_{\mu}(q,\dot{q},Q,\dot{Q},t) = \frac{1}{2}\dot{Q}^2 + \frac{1}{2}\dot{q}^2 + (1-\cos q) + \mu(1-\cos q)f(Q,q,t)$$

where f is 2π periodic in each variable and, using Bessi's method, I will prove the folowing result:

Theorem : *For μ small enough, and f satisfying condition 1, $\mathcal{L}_\mu$ admits orbits satisfying:*

$$\dot{Q}(0) \leq 1 \ , \dot{Q}(t_d) \geq 2 \quad \textit{with} \quad t_d \leq C\mu^{-2} \ .$$

Condition 1 will be expressed later. The polynomial time obtained there is much lower than the time obtained for initially integrable systems.

We first investigate the nonperturbed system. Every torus $\mathbf{T}_\omega : q = \dot{q} = \dot{Q} - \omega = 0$ is invariant and admits a two parameters family of homoclinic orbits : $q(t) = q_0(t - T_0)$, $Q(t) = \omega(t - T_0) + Q_0$ where $q_0(t) = 4 \arctan e^t$. Let

$$\mathcal{A}_\omega(Q_0, T_0) = -\int_{-\infty}^{+\infty} (1 - \cos q_0(t - T_0))\, f(Q_0 + \omega(t - T_0), q_0(t - T_0), t)\, dt$$

be the perturbation part of the action along one of these homoclinic orbits. The function $\mathcal{A}_\omega$ is periodic, so it must have a minimum. Condition 1 says that this minimum is nondegenerate.

Condition 1: There exists a nonnegative real number A which satisfies : For every $\omega \in \left[\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right]$, we can find $(Q_\omega, T_\omega) \in \mathbf{R}^2$ and a box $\mathcal{B}(\omega) = [T_\omega - s_\omega, T_\omega + s_\omega]$ with $|r_\omega| < \pi$ and $|s_\omega| < \pi$ such that $\mathcal{A}(\omega, Q, T) \geq \mathcal{A}(\omega, Q_\omega, T_\omega) + A$ for any $(Q, T) \in \partial\mathcal{B}(\omega)$.

There are two steps in the proof. We first notice that there exists trajectories of the perturbed system that start at the top of an unperturbed homoclinic orbit, follow it down to an invariant torus, stay a long time around that torus, and then leave it along another unperturbed homoclinic orbit. We then glue orbits of that kind together to obtain connections between close to each other invariant tori and we can move step by step along the chain of invariant tori following these connections. The time of diffusion is then obtained as the quotient between the time $T = 1/\mu$ of one of these transitions and the distance μ between two tori that can be joined by such a transition.

Pour un système hamiltonien presque intégrable $(H(p, q) = H_0(p) + \epsilon H_1(p, q), (p, q) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{T}^n)$, le théorème KAM donne l'existence d'un grand nombre de tores invariants et donc d'un grand nombre de trajectoires stables, induisant une petite variation de l'action p. Ceci ne suffit pourtant pas à garantir la stabilité du système. Dans [1],V.I. Arnold a mis en évidence un mécanisme d'instabilité pour les systèmes presque intégrables ayant au moins trois degrés de liberté. Il peut exister, pour de tels systèmes, des trajectoires instables, induisant une grande dérive de l'action c'est à dire telles que $|p(t_1) - p(t_0)| \geq 1$. L'exemple d'Arnold est une perturbation à deux paramètres d'un lagrangien intégrable :

$$\mathcal{L}_{\epsilon,\mu}(q, \dot{q}, Q, \dot{Q}, t) = \frac{1}{2}\dot{Q}^2 + \frac{1}{2}\dot{q}^2 + \epsilon(1 - \cos q) + \epsilon\mu(1 - \cos q)(\cos Q + \cos t).$$

La première perturbation $\mathcal{L}_{\epsilon,0}$ conserve une famille de tores invariants $\mathbf{T}_\omega$ $(\dot{q} = q = \dot{Q} - \omega = 0)$, qu'elle rend partiellement hyperboliques. La deuxième perturbation crée des connections entre tores voisins dans cette famille, qui reste invariante. Il existe alors des trajectoires qui longent ces connections et induisent une dérive du terme $\dot{Q}$ de l'action. Dans un article récent [2], U. Bessi a étudié cet exemple par une méthode variationnelle. Il obtient une majoration du temps de diffusion t_d tel que $|\dot{Q}(t_d) - \dot{Q}(0)| \geq 1$: pour ϵ petit et μ exponentiellement petit devant ϵ $(\mu \leq e^{-a/\epsilon})$, il existe des trajectoires diffusantes qui vérifient $t_d \leq e^{c/\sqrt{\epsilon}}$. Remarquons que ce temps a été minoré dans [3] par $t_d \geq \exp(\epsilon^{-1/4})$, la diffusion dans ces systèmes est exponentiellement lente. De nombreux problèmes se posent lorsqu'on essaie de généraliser ces méthodes (voir [4] pour un résumé des idées actuelles sur ce sujet), mais il apparaît que l'introduction d'hyperbolicité partielle par une première perturbation est une étape importante. Il semble donc utile d'étudier des systèmes directement hyperboliques, pour lesquels la diffusion, quoique beaucoup plus claire et beaucoup plus rapide [4], n'est pas encore comprise. À la suite d'une suggestion de P. Lochak, je me suis donc interessé à l'exemple

$$\mathcal{L}_\mu(q,\dot{q},Q,\dot{Q},t)=\frac{1}{2}\dot{Q}^2+\frac{1}{2}\dot{q}^2+(1-\cos q)+\mu(1-\cos q)f(Q,q,t),$$

où f est une fonction 2π périodique en chaque variable. Par la méthode de Bessi, on montre le résultat suivant:

THÉORÈME : *Pour μ suffisamment petit, le système de lagrangien $\mathcal{L}_\mu$, où f vérifie la condition 1 ci-dessous , admet des trajectoires qui vérifient:*

$$\dot{Q}(0)\leq 1\ ,\dot{Q}(t_d)\geq 2\quad avec\quad t_d\leq C\mu^{-2}\ .$$

La condition 1, qui sera explicitée dans la suite, ne représente qu'une contrainte minime, elle est en particulier vérifiée par le cas $\epsilon=1$ de l'exemple d'Arnold. Le temps de diffusion obtenu, polynomial, est effectivement beaucoup plus faible que celui d'un système initialement intégrable.

1- SYSTÈME NON PERTURBÉ: Dans le cas non perturbé on a affaire au produit non couplé d'un oscillateur libre et d'un pendule pesant. Ce système admet une famille à un paramètre de tores invariants partiellement hyperboliques $\mathbf{T}_\omega$: $q=\dot{q}=\dot{Q}-\omega=0$. L'équation de la séparatrice du pendule valant π au temps T_0 est $q(t)=q_0(t-T_0)$, où $q_0(t)=4\arctan e^t$, $\dot{q}_0(t)=2(\cosh t)^{-1}$. Chaque tore $\mathbf{T}_\omega$ admet une famille à deux paramètres de trajectoires homoclines: $q(t)=q_0(t-T_0)$, $Q(t)=\omega(t-T_0)+Q_0$. On appellera par la suite séparatrices ces trajectoires homoclines non perturbées. On considèrera la fonctionnelle suivante, qui est le terme de perturbation de l'action le long d'une séparatrice:

$$\mathcal{A}_\omega(Q_0,T_0)=-\int_{-\infty}^{+\infty}(1-\cos q_0(t-T_0))\,f(Q_0+\omega(t-T_0),q_0(t-T_0),t)\,dt.$$

La fonction $\mathcal{A}_\omega$ est périodique, et admet un minimum. On supposera dans la suite vértifiée la condition 1 suivante, qui est une condition de non dégénerescence de ce minimum:

CONDITION 1: Il existe un réel positif A tel que pour tout $\omega\in\left[\frac{1}{2},\frac{5}{2}\right]$, il existe un point $(Q_\omega,T_\omega)\in\mathbf{R}^2$ et une boite $\mathcal{B}(\omega)=[T_\omega-s_\omega,T_\omega+s_\omega]\times[Q_\omega-r_\omega,Q_\omega+r_\omega]$ avec $|r_\omega|<\pi$ et $|s_\omega|<\pi$, tels que l'on ait $\mathcal{A}(\omega,Q,T)\geq\mathcal{A}(\omega,Q_\omega,T_\omega)+A$ pour tout $(Q,T)\in\partial\mathcal{B}(\omega)$.

2- Le lemme 1 ci-dessous donne l'existence d'une trajectoire qui longe une séparatrice depuis son apogée ($q=\pi$) jusqu'à un tore invariant, puis reste le long du tore, puis repart le long d'une autre séparatrice. On admettra ce lemme, dont la démonstration demande quelques calculs, que l'on peut trouver dans [2]. On pose $T=A_0/\mu$, avec $A_0>1$ et $l=|\log\mu|/6$.

LEMME 1 *Soit μ petit et $(Q_0,Q_1,T_0,T_1)\in\mathbf{R}^4$. Il existe une unique trajectoire minimisante $(Q,q,\dot{Q},\dot{q})$ du système perturbé vérifiant les conditions aux extrémités $q(T_0)=-\pi,q(T_1)=\pi,Q(T_0)=Q_0,Q(T_1)=Q_1$. De plus, il existe $\alpha>0$ tel que si $T\leq T_1-T_0$ la trajectoire ainsi définie soit μ^α-proche en topologie C^0 de la séparatrice (ω,T_0,Q_0) sur $[T_0,T_0+l]$, puis du tore $\mathbf{T}_\omega$ sur $[T_0+l,T_1-l]$ puis de la séparatrice (ω,T_1,Q_1), où $\omega=(Q_1-Q_0)/(T_1-T_0)$.*

On associe ainsi, à un tore $\mathbf{T}_\omega$ et à deux séparatrices de ce tore, une solution particulière, une *boucle*, qui vérifie les propriétés décrites ci-dessus. On a une famille à trois paramètres de boucles venant tourner autour d'un tore fixé , puisque choisir un tore revient à imposer la relation $\omega = (Q_1 - Q_0)/(T_1 - T_0)$ entre les conditions aux bords. En recollant deux boucles, on obtient une *transition simple*, c'est à dire une trajectoire qui joint un voisinage d'un premier tore $\mathbf{T}_{\omega_1}$ à un voisinage d'un second tore $\mathbf{T}_{\omega_2}$. C'est l'objet de la proposition suivante, qui sera démontrée par la suite.

Proposition: *Pour μ suffisamment petit, pour tous ω_1 et ω_2 tels que $1/2 < \omega_1 < \omega_2 < 5/2$ et $0 \leq \omega_2 - \omega_1 \leq \mu$, pour tous $(T_{-1}, Q_{-1}, T_1, Q_1)$ tels que $|(Q_1 - Q_{-1})/(T_1 - T_{-1}) - \omega_1| \leq \mu$ et $T_1 - T_{-1} \geq 2T$, il existe (T_0, Q_0), tel que $|(Q_1 - Q_0)/(T_1 - T_0) - \omega_2| \leq \mu$ et $|(Q_0 - Q_{-1})/(T_0 - T_{-1}) - \omega_1| \leq \mu$, et tel que la juxtaposition des boucles d'extrémités $(T_{-1}, Q_{-1}, T_0, Q_0)$ et (T_0, Q_0, T_1, Q_1) forme, sur $[T_{-1}, T_1]$, une solution du système.*

Le théorème en découle simplement, en effet on obtient ainsi non seulement une transition simple joignant $\mathbf{T}_{\omega_1}$ et $\mathbf{T}_{\omega_2}$, mais une famille de telles transitions, les paramètres étant ici les valeurs aux extrémités $(T_{-1}, Q_{-1}, T_1, Q_1)$. On peut donc reproduire le processus de recollement pour obtenir des transitions doubles (longeant trois tores) puis triples, etc ... On peut ainsi construire des transitions multiples joignant pas à pas deux tores arbitrairement éloignés $\mathbf{T}_{\omega_1}$ et $\mathbf{T}_{\omega_2}$, si $1/2 < \omega_1 \leq \omega_2 < 5/2$. Le temps de diffusion apparaît comme le quotient du temps T d'une transition simple par l'écart entre deux tores que l'on peut joindre par une telle transition. Ceci démontre le théorème puisque $T = A_0/\mu$.

3- Démonstration de la proposition: Soit H l'espace des courbes de $H^1([T_{-1}, T_1], \mathbf{R}^2)$ vérifiant les conditions aux extrémités suivantes: $q(T_{-1}) = -\pi$, $q(T_1) = 3\pi$, $Q(T_{-1}) = Q_{-1}$, $Q(T_1) = Q_1$. On va construire, par une méthode variationnelle, une transition simple dans cet espace. Soit $\iota : \mathbf{R}^2 \longrightarrow H$ l'application qui, à $(T_0, Q_0) \in \mathbf{R}^2$, associe la courbe obtenue par recollement des deux boucles $(T_{-1}, Q_{-1}, T_0, Q_0)$ et (T_0, Q_0, T_1, Q_1). On définit sur H la fonctionnelle d'action $\mathcal{F}$ et on notera $\mathcal{F}_Y$ aussi bien sa restriction à $\mathbf{Y} = \iota(\mathbf{R}^2)$ que $\mathcal{F} \circ \iota$.

Lemme 2: *Un minimum local de $\mathcal{F}_Y$ est une solution du système sur $[T_{-1}, T_1]$.*

Pour démontrer ce lemme, il suffit de montrer que tout minimum local sur $\mathbf{Y}$ est un minimum local sur H. Pour ceci considérons l'application $G : H \longrightarrow \mathbf{R}^2$, $(Q(t), q(t)) \longmapsto (a, b)$, où $a = \inf\{t : q(t) > \pi\}$ et $b = q(a)$. On notera aussi G l'application $\iota \circ G$. Les boucles étant des trajectoires minimisantes, $\mathcal{F}(\gamma) \geq \mathcal{F}(G(\gamma))$. Par ailleurs les boucles, proches des séparatrices, vérifient $\dot{q}(T_0) > 0$ et $q(t) \neq q(T_0)$ pour $t \neq T_0$. Donc G est continue au voisinage de $\mathbf{Y}$. Soit alors γ_0 un minimum local de $\mathcal{F}_Y$, et soit $\gamma \in H$. Si γ est proche de γ_0, alors $G(\gamma)$ est proche de $\gamma_0 = G(\gamma_0)$, donc $\mathcal{F}(\gamma) \geq \mathcal{F}(G(\gamma)) \geq \mathcal{F}(\gamma_0)$; γ_0 est donc un minimum local de $\mathcal{F}$ sur H, ceci démontre le lemme 2.

On est donc ramené à chercher un minimum local bien placé de $\mathcal{F}_Y$ pour démontrer la proposition. Les boucles longeant les séparatrices auxquelles elles sont associées, on peut approcher leurs actions par celles de ces séparatrices. En fait, l'action d'une séparatrice n'est pas définie. Par contre le terme de perturbation $\mathcal{P}$ de cette action est bien défini. On va chercher dans un premier temps à minimiser $\mathcal{P}$, puis on montrera que ses variations sont prédominantes dans la zone considérée, et donc que $\mathcal{F}$ admet un minimum local au voisinage du minimum local de $\mathcal{P}$. Etudions $\mathcal{P}$ le long d'une boucle: avant d'atteindre le tore $\mathbf{T}_{\omega_1}$, il y a une partie de courbe qui longe une séparatrice fixée (ne dépendant pas de (T_0, Q_0)), puis une partie de courbe entre $\mathbf{T}_{\omega_1}$ et $\mathbf{T}_{\omega_2}$ longeant la séparatrice (ω_1, T_0, Q_0), puis une autre partie longeant un morceau fixé de séparatrice. Par conséquent $\mathcal{P}(T_0, Q_0) \approx C + \mathcal{A}(\omega_1, T_0, Q_0)$, et il est naturel de chercher un minimum local de $\mathcal{P}$ au voisinage du minimum $(T_{\omega_1}, Q_{\omega_1})$ de $\mathcal{A}_{\omega_1}$.

Plus précisément, soit $B \subset \mathbf{R}^2$ tel que $B = \mathcal{B}(T_{\omega_1}, Q_{\omega_1}) \mod[2\pi]$ et tel que pour tout $(T_0, Q_0) \in B$ on ait $|(Q_1 - Q_0)/(T_1 - T_0) - \omega_2| \leq \mu$ et $|(Q_0 - Q_{-1})/(T_0 - T_{-1}) - \omega_1| \leq \mu$. $\mathcal{F}_{\mathcal{Y}}$ admet un minimum sur B, qui est compact. Si ce minimum est atteint à l'intérieur de B, il s'agit d'un minimum local de $\mathcal{F}_Y$ et la proposition découle du lemme 2. Montrons que $\mathcal{F}(\partial B) \geq \mathcal{F}(T_{\omega_1}, Q_{\omega_1})$; pour ceci, posons $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 + \mu\mathcal{P}$. On peut appliquer le lemme 1 au cas $\mu = 0$ et on obtient des boucles non perturbées. On notera γ_{ω_1} la trajectoire obtenue par recollement des boucles non perturbées entre $(T_{-1}, Q_{-1}, T_{\omega_1}, Q_{\omega_1})$ et $(T_{\omega_1}, Q_{\omega_1}, T_1, Q_1)$. Remarquons que $\mathcal{F}(\gamma_{\omega_1}) \geq \mathcal{F}(T_{\omega_1}, Q_{\omega_1})$. Il est utile de considérer cette trajectoire car il est plus facile d'estimer le terme de perturbation de l'action le long d'une boucle non perturbée (que l'on peut approcher par $\mathcal{A}$ puisque les boucles non perturbées longent les séparatrices), que le terme non perturbé de l'action le long d'une boucle perturbée. On se ramène à montrer que $\mathcal{F}(\gamma_{\omega_1}) \leq \mathcal{F}(\partial B)$. Soit $(T_0, Q_0) \in \partial B$. Posons

$$\begin{aligned} P = \; & - \int_0^{\infty} (1 - \cos q_0(t - T_{-1}))\, f(Q_{-1} + \omega_1(t - T_{-1}), q_0(t - T_{-1}), t)\, dt \\ & - \int_{-\infty}^{0} (1 - \cos q_0(t - T_1))\, f(Q_1 + \omega_1(t - T_1), q_0(t - T_1), t)\, dt. \end{aligned}$$

Comme indiqué ci–dessus, les approximations suivantes se démontrent sans difficulté grâce au lemme 1:

$$\mathcal{P}(T_0, Q_0) = \mathcal{A}(\omega_1, T_0, Q_0) + P + \epsilon(\mu),$$
$$\mathcal{P}(\gamma_{\omega_1}) = \mathcal{A}(\omega_1, T_{\omega_1}, Q_{\omega_1}) + P + \epsilon(\mu),$$

où $\epsilon(\mu) \longrightarrow 0$ quand $\mu \longrightarrow 0$. Donc, en utilisant la condition 1 :

$$\mathcal{P}(T_0, Q_0) \geq \mathcal{P}(\gamma_{\omega_1}) + A + \epsilon(\mu).$$

Ceci démontre la première partie de nos assertions: le terme de perturbation $\mathcal{P}$ admet un minimum local sur B. Posons: $\gamma_{\omega_1}(t) = (Q_m(t), q_m(t))$. Les inégalités suivantes expriment que, comme annoncé, les variations de l'action non perturbée sont plus faibles que celles de $\mathcal{P}$.

$$\int_{T_{-1}}^{T1} \left(\frac{1}{2}\dot{q}_0^2 + (1 - \cos q_0) \right) \geq \int_{T_{-1}}^{T1} \left(\frac{1}{2}\dot{q}_m^2 + (1 - \cos q_m) \right) + o(\mu).$$

On démontre cette inégalité en remarquant que, si $(Q(t), q(t))$ est la réunion de boucles non perturbées de mêmes extrémités que $(Q_0(t), q_0(t))$, alors $\int_{T_{-1}}^{T1} 1/2\, \dot{q}_0^2 + (1 - \cos q_0) \geq \int_{T_{-1}}^{T1} 1/2\, \dot{q}^2 + (1 - \cos q)$. On est alors ramené à comparer les actions de deux trajectoires du pendule. L'inégalité

$$\int_{T_{-1}}^{T1} \left(\frac{1}{2}\dot{Q}_0^2 - \frac{1}{2}\dot{Q}_m^2 \right) \geq -\frac{C}{A_0}\mu$$

permet de conclure:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(T_0, Q_0) &= \mathcal{F}_0(T_0, Q_0) + \mu\mathcal{P}(T_0, Q_0) \\ &\geq \mathcal{F}_0(\gamma_{\omega_1}) + \mu\mathcal{P}(\gamma_{\omega_1}) + o(\mu) + A\mu - \frac{C}{A_0}\mu \\ &\geq \mathcal{F}(\gamma_{\omega_1}) + \left(A - \frac{C}{A_0} \right) \mu + o(\mu). \end{aligned}$$

Si A_0 est suffisamment grand (de sorte que $(A - C/A_0) > 0$), pour μ petit, $\mathcal{F}$ atteint son minimum sur l'intérieur de B. Le recollement est donc effectué : on a construit une transition simple, et donc démontré la proposition.

References

[1] V.I. Arnold : Instability of Dynamical Systems with Several Degrees of Freedom, Soviet Mathematics, **5** (1964), 581-585.

[2] U. Bessi : An Approach to Arnold's Diffusion through the Calculus of Variations, Nonlinear Analysis,T.M.A.,1995.

[3] P.Lochak : Hamiltonian Perturbation Theory : Periodic Orbits, Resonance and Intermittency, Nonlinearity, **6** (1993) 885-904.

[4] P.Lochak : Arnold's Diffusion; a Compendium of Remarks and Questions, in *Proceedings of the Barcelona 1995 conference on dynamical systems with more than 3 degrees of freedom*, Kluwer, à paraître.