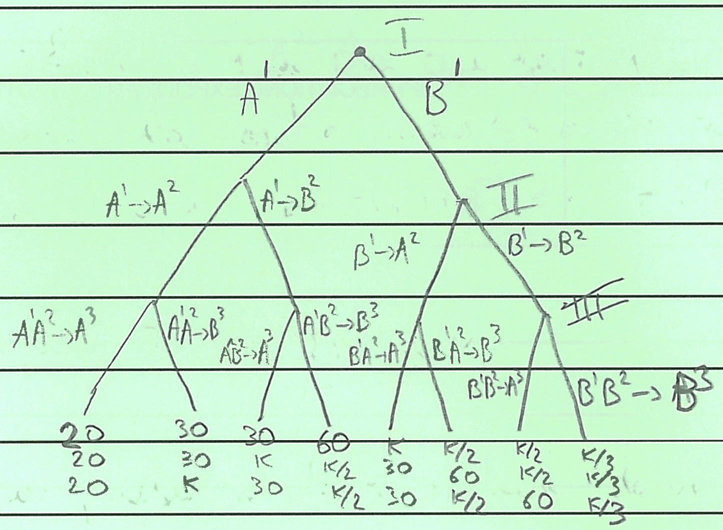
Exercice 1

1)



2) J_1 a 2 strats

J_2 a $2 \times 2 = 4$ strats.

J_3 a $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$ strats

3) On trouve $\left(B_1 ; (A_1 \to B_2, B_1 \to B_2) ; (A^1A^2 \to B^3, A^1B^2 \to B^3, B^1A^2 \to B^3, B^1B^2 \to A^3)\right)$ de paiement $(75, 75, 60)$

4) On trouve $\left(A^1 ; (A^1 \to B^2, B^1 \to A^2) ; (A^1A^2 \to B^3, A^1B^2 \to B^3, B^1A^2 \to B^2, B^1B^2 \to A^3)\right)$ de paiement $(60, 45, 45)$

5) Il faut trouver un E.N tq J_2 soit seul à jouer A. Pour cela, il va utiliser une menace non crédible en jouant $(A^1 \to A^2)$.

On peut prendre par exemple

$(B^1, (A^1 \to A^2, B^1 \to A^2); (A^1A^2 \to B^3, A^1B^2 \to B^3, B^1A^2 \to B^3, B^1B^2 \to A^3))$

C'est un Nash (en particulier J_1 n'a pas intérêt à dévier à cause de la menace de J^2) mais ce n'est pas un ESJP car dans l'arbre issu de A^1, le profil $(A^1 \to A^2; (A^1A^2 \to B^3, A^1B^2 \to B^3))$ n'est pas un Nash (dev $A^1 \to B^2$ de J^2 est profitable).

⚠ Une réponse du genre $(B^1, B^1 \to A^2, B^1A^2 \to B^3)$ est fausse : ceci n'est pas un profil donc pas un équilibre ; comment savoir si J^1 a une dev profitable ?

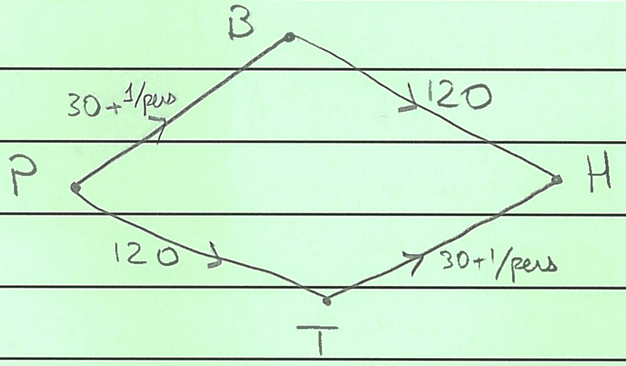
6) Appelons pour chaque joueur TB^i la stratégie qui joue B^i $\forall$ le passé.

Pour tout profil ~~...~~ et tout joueur, la déviation TB^i fait gagner au moins 80, donc dans tout EN chaque joueur reçoit au moins 80. Donc dans chaque EN, personne ne se retrouve à vendre de l'Alimentation (sinon paiement ≤ 60), donc tout le monde vend du Bricolage et le paiement est (80, 80, 80)

<u>Remarque</u> : Il n'est pas vrai que (TB^1, TB^2, TB^3) est le seul E.N, en fait n'importe quel profil tq J_1 joue B^1, J^2 joue $B^1 \to B^2$ et J^3 joue $B^1B^2 \to B^3$ est un E.N

Exercice 2

1)



a) $g^i(B^i, a^{-i}) = -(30 + m_B^{-i} + 1 + 120 = 151 + m_B^{-i})$

$g^i(T^i, a^{-i}) = -(30 + m_T^{-i} + 1 + 120 = 151 + m_T^{-i})$

ne pas oublier le +1 du au fait que le joueur lui même prend la route (mais ça ne change rien au raisonnement)

On en deduit que (puisque $m_B^{-i} + m_T^{-i} = 59$)

$m_B^{-i} \geq 30 \Longrightarrow BR^i(a^{-i}) = \{T^i\}$

$m_B^{-i} \leq 29 \Longrightarrow BR^i(a^{-i}) = \{B^i\}$

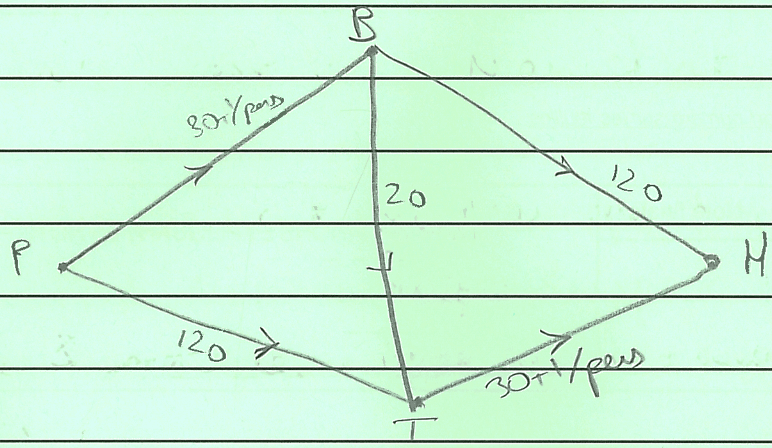
b) Soit un profil et k le nombre de voitures passant par B.

* Si $k \geq 31$, d'après a) les joueurs passant par B ne sont pas en meilleure réponse car $m_B^{-i} \geq 30$ pour chaque joueur
* Si $k \leq 29$ $m_B^{-i} \leq 29$ pour chaque joueur donc ceux passant par T ne sont pas en meilleure réponse.
* Pour $k = 30$, $m_B^{-i} = 30$ pour ceux qui jouent T^i et $m_B^{-i} = 29$ pour ceux qui jouent B^i donc tout le monde joue une meilleure réponse → E.N.

Dans chaque E.N chacun met donc 3 h.

PARTIE A RABATTRE

2)



a) Sur PB : $m_B^{-i} + m_{BT}^{-i}$

Sur TH : $m_{BT}^{-i} + m_T^{-i}$

Donc :

$g^i(\cancel{a}B^i, a^{-i}) = -(30 + m_B^{-i} + m_{BT}^{-i} + 1 + 120)$

$g^i(T^i, a^{-i}) = -(30 + m_T^{-i} + m_{BT}^{-i} + 1 + 120)$

$g^i(BT^{-i}, a^{-i}) = -(30 + m_B^{-i} + m_{BT}^{-i} + 1 + 20 + 30 + m_T^{-i} + m_{BT}^{-i} + 1)$

b) Cours

c) On remarque que $m_T^{-i} + m_{BT}^{-i} \leq 59 < 69$

$m_B^{-i} + m_{BT}^{-i} \leq 59 < 69$

donc BT^{-i} est dominante (et même strictement dominante) pour chaque joueur.

Donc $(BT^1, \ldots, BT^{60})$ est un Eq en strat dominantes,

donc un E.N.
Comme les strats B^i et T^i sont strictement dominées, c'est le seul.
Le temps est de 3h20 pour chacun soit 20 min de plus qu'avant !!
Comme on l'a vu en TD (dilemme du prisonnier), rajouter des strats peut baisser le paiement d'eq.

Exercice 3

1) Soit (x^*, y^*) opt, et supposons les de support plein. D'après le cours, on a alors que pour toute strat de J^1, $\underbrace{x^*_i(a^i)}_{\text{noté } x^*_i} > 0$ et donc $\underbrace{g(a^i, y^*)}_{= y^*_i \times m_i} = V$

Donc nécessairement $y^*_i = V/m_i$, et comme $\sum_i y^*_i = 1$ on a nécessairement $V = \underbrace{1/(\sum 1/m_i)}_{:= C}$, $y^*_i = C/m_i$ et par un raisonnement similaire $x^*_i = C/m_i$.

Réciproquement, Fixons donc x^*_i et y^*_i comme cela. Puisque chaque joueur est indifférent entre toutes ses actions (c'est précisément comme cela que l'on a choisi x^* et y^*), (x^*, y^*) est un point selle. Donc d'après le cours x^* et y^* ~~est~~ sont optimales et $V = g(x^*, y^*) = C$

2) Soit x une strat de support non plein : $\exists j$ tq $x_j = 0$.
Alors $g(x, \delta_j) = 0 < V$ donc x pas optimale
strat pure = jouer $j^{\text{ème}}$ colonne

3) Soit y une strat de support $J \neq \{1, \dots, m\}$.
D'après 1), $\exists$ x une strat de support J telle que
$g(x,y) = \frac{1}{\sum_J 1/m_i} > \frac{1}{\sum_{i=1}^{N} 1/m_i}$ donc y pas optimale.

4)

	G	D
H	1	0
B	0	-1

← unique E.N car G et B sont strictement dominées.

5) On a vu en a) qu'en (x^*, y^*) chaque joueur est indifférent ; il l'est qu'il maximise ou minimise son paiement ! Donc (x^*, y^*) reste un E.N. Ce n'est pas le seul : n'importe quelle couple $(\delta i, \delta i)$, ie n'importe quelle case diagonale de la matrice, est un E.N en strat pures

Remarque : on peut montrer qu'il y a exactement $2^n - 1$ E.N : 1 pour chaque support non vide J (et que ~~chaque joueur~~ ~~J~~ $supp\, J_1 = supp\, J_2$ dans chaque equilibre).