Université Paris Dauphine,
L3, Année 2015-2016

Examen d'Analyse Complexe

La calculatrice et les documents de cours ne sont pas autorisés. Toutes les réponses doivent être soigneusement justifiées ; la correction récompensera la rigueur, précision et clarté des démonstrations.

Exercice 1.
1. Question de cours : définir l'indice d'un point par rapport à un lacet. Calculer explicitement l'indice de 0 par rapport au lacet γ, avec $\gamma(t) = e^{it}$ sur $t \in [0, 2\pi]$
2. Calculer $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{1+8\sin^2(t)}$. On s'attachera à être le plus précis possible concernant d'éventuels calculs d'indices.
   Indication : $2z^4 - 5z^2 + 2 = 2(z^2 - 2)(z^2 - 1/2)$.

Exercice 2. Le but de l'exercice est de calculer $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{1+x^2} dx$. Pour cela, on fixe $R > 1$, on considère le lacet γ constitué des deux chemins suivants :
- le segment $[-R, R]$ paramétrisé par $\gamma_1(t) = t$ sur $t \in [-R, R]$
- le demi cercle supérieur de centre 0 et de rayon R paramétrisé par $\gamma_2(\theta) = Re^{i\theta}$ sur $\theta \in [0, \pi]$,
et on cherche d'abord à évaluer $I = \int_\gamma \frac{e^{iz}}{1+z^2} dz$.
1. Calculer I en utilisant le théorème des résidus (on pourra se contenter d'une explication rapide pour le calcul d'indices).
2. Montrer que
$$I = \int_{-R}^{R} \frac{e^{ix}}{1+x^2} dx + \int_0^\pi \frac{iRe^{i\theta + iR\cos\theta - R\sin\theta}}{1 + R^2 e^{2i\theta}} d\theta.$$
3. En déduire que $\left| I - \int_{-R}^{R} \frac{e^{ix}}{1+x^2} dx \right| \leq \frac{\pi R}{R^2 - 1}$.
4. En faisant tendre R vers $+\infty$ en déduire la valeur de $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{1+x^2} dx$ puis de $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{1+x^2} dx$.

Exercice 3. Relations de Cauchy-Riemann
1. Question de cours : énoncer, sans démonstration, les relations de Cauchy-Riemann vérifiées par une fonction holomorphe.
2. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{C}$ par :
$$f(z) = \begin{cases} \frac{(\bar{z})^3}{|z|^2} & \text{si } z \neq 0 \\ 0 & \text{si z=0} \end{cases}$$
   (a) Montrer que f est continue en 0.
   (b) Montrer que f vérifie les équations de Cauchy-Riemann en 0.

(c) Pour $\varepsilon > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$, calculer $\frac{f(\varepsilon e^{i\theta})}{\varepsilon e^{i\theta}}$. En déduire que f n'est pas holomorphe en 0.

Exercice 4. Dans tout l'énoncé U est un ouvert non vide de $\mathbb{C}$ et $z_0 \in U$.

1. Question de cours : soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe sur $U \backslash \{z_0\}$ et continue en z_0. Montrer que f est holomorphe sur U. Vous pouvez utiliser d'autres résultats du cours sans démonstration à condition qu'ils soient clairement énoncés.
2. Question de cours : donner la définition de singularité artificielle (ou effaçable) d'une fonction holomorphe, et celle d'un pôle d'ordre n d'une fonction holomorphe.
3. Soit $f : U \backslash \{z_0\} \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe sur $U \backslash \{z_0\}$ et bornée au voisinage de z_0. Le but de cette question est de montrer que z_0 est une singularité artificielle de f
   (a) On considère
   $$h(z) = \begin{cases} (z - z_0)f(z) & \text{si } z \neq z_0 \\ 0 & \text{si } z = z_0 \end{cases}$$
   Montrer que h est holomorphe sur U.
   (b) Soit
   $$g(z) = \begin{cases} f(z) & \text{si } z \neq z_0 \\ h'(z_0) & \text{si } z = z_0 \end{cases}$$
   Montrer que g est holomorphe sur U et conclure.
4. Soit $f : U \backslash \{z_0\} \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe sur $U \backslash \{z_0\}$ et telle que $|f(z)|$ tend vers $+\infty$ quand z tend vers z_0. Le but de cette question est de montrer que z_0 est un pôle de f. Soit V un voisinage de z_0 tel que $V \subset U$ et tel que f ne s'annule pas sur V.
   (a) On considère, pour $x \in V$,
   $$k(z) = \begin{cases} \frac{1}{f(z)} & \text{si } z \neq z_0 \\ 0 & \text{si } z = z_0 \end{cases}$$
   Montrer que k est holomorphe sur V.
   (b) Montrer qu'il existe $n > 0$ tel que $k^{(n)}(z_0) \neq 0$ et $k^{(i)}(z_0) = 0$ pour tout $i < n$. En déduire que z_0 est un pôle d'ordre n de f.
   (c) Expliquer brièvement pourquoi la réciproque est vraie : si z_0 est un pôle de f, alors $|f(z)|$ tend vers $+\infty$ quand z tend vers z_0.
5. Application : soit f méromorphe sur U et P un polynôme. Montrer que $P \circ f$ est méromorphe sur U.