Université Paris Dauphine,
M1, Année 2016-2017

Examen d'Analyse Convexe approfondie

Instructions :

La calculatrice et les documents de cours ne sont pas autorisés. Toutes les réponses doivent être soigneusement justifiées ; la correction récompensera la rigueur, précision et clarté des démonstrations.

Exercice 0 : Préliminaires.

1. Question de cours : Montrer que pour toutes fonctions $f$et g de E dans $\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ on a, pour tout $x \in dom(f)\cap dom(g)$, $\partial f(x)+\partial g(x) \subset \partial(f+g)(x)$.
2. Préliminaire : Montrer que si E est un espace de Hilbert et $f(x) = \|x\|$, $\partial f(x) = \left\{\frac{x}{\|x\|}\right\}$ si $x \neq 0$, et que $\partial f(0) = B_f(O, 1)$ la boule unitée fermée. Ce résultat pourra être utilisé sans redémonstration dans les exercices.

Exercice 1. Soit $E = \mathbb{R}^2$ muni de la norme euclidienne et A, B, C 3 points non alignés du plan. L'objectif de l'exercice est de caractériser le point du plan minimisant la somme des distances aux trois points A, B, C, appelé point de Fermat du triangle ABC. On note a b et c dans $\mathbb{R}^2$ les coordonnées des 3 points et $x \in E$ les coordonnées du point de Fermat ; on cherche donc à minimiser $f(x) = \|x-a\| + \|x-b\| + \|x-c\|$.

1. Montrer que le problème admet bien un minimiseur.
2. Montrer que f est strictement convexe : $f(\frac{x+y}{2}) < \frac{f(x)}{2} + \frac{f(y)}{2}$ pour $x \neq y$, ce qui implique que la solution est unique.
3. Montrer que le sommet A est solution du problème si et seulement $\left\|\frac{a-b}{\|a-b\|} + \frac{a-c}{\|a-c\|}\right\|^2 \leq 1$. En déduire que c'est le cas si et seulement si le triangle ABC a un angle en A supérieur à $2\pi/3$.
4. On suppose à partir de maintenant que le point de Fermat x n'est pas un sommet et on note $u = \frac{x-a}{\|x-a\|}$, $v = \frac{x-b}{\|x-b\|}$ et $w = \frac{x-c}{\|x-c\|}$. Montrer que x est solution ssi $u+v+w = 0$.
5. En déduire que $\langle u|v\rangle + \langle u|w\rangle = \langle u|v\rangle + \langle v|w\rangle = \langle u|w\rangle + \langle v|w\rangle = -1$ puis que X est le point tel que les trois angles (non orientés) $\widehat{AXB}$, $\widehat{BXC}$ et $\widehat{CXA}$ valent chacun $2\pi/3$.

Exercice 2. Soit $n \geq 1$, $m \geq 2$ et $A = \{y_1, \cdots, y_m\} \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble fini de cardinal m. On cherche les plus petits disques contenant A, c'est à dire les couples (x, r) avec r minimal tels que $\|x - y_i\| \leq r$ pour tout i. Soit $F = \mathbb{R}^{n+1}$, on définit f et g_i sur F par

$$\begin{aligned} f(x,r) &= r \\ g_i(x,r) &= \|x-y_i\| - r \end{aligned}$$

et on pose $C_i = \{(x, r), g_i(x, r) \leq 0\}$.

1. Vérifier que le problème se réécrit comme $\min_{(x,r)\in\cap C_i} f(x,r)$. Utiliser KKT (en vérifiant les hypothèses) pour donner des CNS d'optimalités.
2. Montrer que si (x, r) est optimal et $x = y_i$, alors λ_i (le multiplicateur associé à g_i) est nul.
3. Montrer que $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$.
4. En déduire que (x, r) est solution si et seulement si $\|x - y_i\| \leq r$ pour tout i et $x \in conv(C)$ où C est le sous ensemble de A comprenant les points y_i tels que $\|x - y_i\| = r$.
5. Application : on suppose $n = 2$, $m = 3$, et que les 3 points y_1 y_2 et y_3 ne sont pas alignés. Où se trouve la solution x si le triangle a tous ses angles aigus ? Si l'angle en y_i est obtus ?

Exercice 3. Soit E un espace vectoriel (pas forcément de dimension finie). Le but de l'exercice est de trouver des CNS d'optimalité pour des problèmes de minimisation du type

$$\min_{x\in F} f(x)$$

où $F = (\cap_{i=1}^m G_i) \cap H$, avec $G_i := \{x, g_i(x) \leq 0\}$, $H := \{x, \phi(x) = c\}$ et où on a supposé que $f : E \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ est convexe sci, que chaque g_i est convexe continue et que ϕ est linéaire continue et non identiquement nulle. On suppose également la condition de qualification suivante : il existe $x_0 \in F \cap \mathrm{dom}\,(f)$ telle que f est continue en x_0 et $g_i(x_0) < 0$ pour tout i.

1. Pourquoi ne peut on pas tout simplement utiliser le théorème KKT vu en cours en remarquant que $H = \{x, \phi(x) - c \leq 0\} \cap \{x, -\phi(x) + c \leq 0\}$?
2. Question de cours : donner sans démonstration $\partial i_{G_i}(x)$ selon que $g_i(x)$ est nul, strictement positif ou strictement négatif.
3. Montrer que si $x \in H$, alors $\partial i_H(x) = \{\phi', \phi'(y) = 0 \ \forall y \in K\}$ où on a noté $K = \{y \in E,\ \phi(y) = 0\}$.
4. En déduire que si $x \in H$, alors $\partial i_H(x) = \mathbb{R}\phi$. Que vaut $\partial i_H(x)$ lorsque $x \notin H$?
5. Montrer KKT généralisé : x est solution si et seulement si $x \in F$ et il existe des réels positifs λ_i (pour i allant de 1 à m) et un réel quelconque μ tels que
$$\begin{cases} \lambda_i g_i(x) = 0 \ \forall i \\ 0 \in \partial f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \partial g_i(x) + \mu\phi. \end{cases}$$
6. Application : Minimiser $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ sous les contraintes $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ et $x_1 \leq 1/5$.

Exercice 4. Soit $E = \mathbb{R}^n$ muni de la norme 2, on identifie E et son dual. Soient A et B deux ensembles convexes compacts non vides de E et M une matrice carrée de taille n.

1. Justifier que $\inf_{a\in A} \sup_{b\in B} \langle Ma|b\rangle$ est fini, et que le sup et l'inf sont atteints.
2. Que vaut $(i_A)^*$?
3. En déduire la conjuguée de $h(a) = \max_{b\in B} \langle a|b\rangle$.
4. Montrer le théorème du minimax : $\min_{a\in A} \max_{b\in B} \langle Ma|b\rangle = \max_{b\in B} \min_{a\in A} \langle Ma|b\rangle$. Indication : appliquer le corollaire de Fenchel-Rockafellar à i_A et h.