Université Paris Dauphine,
M1, Année 2017-2018
G. Vigeral

Examen d'Analyse convexe approfondie

La calculatrice et les documents de cours ne sont pas autorisés. Les réponses doivent être justifiées. Tout résultat du cours peut être utilisé à condition d'être clairement énoncé. Dans tous les exercices E est un espace vectoriel normé ; quand il est de dimension finie il est est identifié à son dual.

Exercice 1. Dans $E = \mathbb{R}^n$, résoudre

$$\inf_{x, \langle v|x\rangle \leq b} \frac{1}{2}\|x\|_2^2 - \langle u|x\rangle$$

où u et v sont dans E, $v \neq 0$, et $b \in \mathbb{R}$.

Exercice 2. Dans tout l'exercice $C \subset E$ est un convexe non vide et on dit qu'un point $x \in E$ est faiblement séparé d'un convexe C s'il existe $\phi \in E^*$ tel que $\phi(x) \leq \phi(y)$ pour tout $y \in C$, et si l'inégalité est stricte pour au moins un $y \in C$. Les deux parties sont indépendantes.

1. Dans cette partie E est de dimension finie. Le but de cette partie est de montrer le résultat suivant : si $x \notin C$ alors x est faiblement séparé de C.
   (a) On suppose dans cette question uniquement C ouvert. Montrer que x est faiblement séparé de C si et seulement si $x \notin C$.
   (b) Pour C d'intérieur non vide donner sans démonstration une relation entre C et $adh(int(C))$, et en déduire le résultat dans ce cas.
   (c) Expliquer brièvement comment on pourrait montrer le résultat pour C général en utilisant l'intérieur relatif.
   (d) Montrer par un exemple qu'il est possible qu'un point $x \in C$ soit faiblement séparé de C.
2. A présent E est l'ensemble des suites réelles dont tous les termes sont nuls à partir d'un certain rang, et C est l'ensemble de telles suites telles que le dernier terme non nul est strictement positif (en particulier la suite identiquement nulle notée 0 n'est pas dans C).
   (a) Montrer que C est convexe.
   (b) Soit $x \in E$. Montrer qu'il existe $y \in E$ tel que $tx + y \in C$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
   (c) En déduire que 0 n'est pas faiblement séparée de C.

Exercice 3. $E = \mathbb{R}^n$, et $\Delta \subset E$ est l'ensemble $\{x \in E, x_i \geq 0\ \forall i,\ \sum_{i=1}^n x_i = 1\}$. Soit ψ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\psi(u) := \begin{cases} u\ln(u) & \text{si } u > 0 \\ 0 & \text{si } u = 0 \\ +\infty & \text{si } u < 0 \end{cases}$$

Pour a dans E et b dans Δ on appelle divergence de a par rapport à b et on note

$$D(a,b) := \sum_{i=1}^{n} \psi(a_i) - a_i \ln(b_i).$$

On s'intéresse au problème, apparaissant en théorie de l'information, de la minimisation de la divergence par rapport à une probabilité $p \in \Delta$ fixée :

$$\inf_{x\in\Delta} D(x,p).$$

1. Préliminaires
   (a) Calculer la conjuguée de Fenchel de la fonction exponentielle.
   (b) Montrer que ψ est convexe sci, et en déduire qu'à p fixée $H(x,p)$ est convexe sci en x.
   (c) Calculer $\partial\psi(u)$. En déduire qu'à p fixée
   $$\partial D(x,p) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{n}(1+\ln(x_i)-\ln(p_i))e_i & \text{si } x_i > 0 \ \forall\ i \\ \emptyset & \text{sinon} \end{cases}$$
   où $(e_1, \cdots, e_n)$ est la base canonique de E.
   (d) Soit $C = \{x \in E, \sum_{i=1}^{n} x_i = 1\}$. Montrer que
   $$\partial i_C(x) = \begin{cases} \{(\lambda, \lambda, \cdots, \lambda),\ \lambda \in \mathbb{R}\} & \text{si } x \in C \\ \emptyset & \text{sinon} \end{cases}$$
2. Résoudre $\inf_{x\in C} D(x,p)$.
3. Résoudre $\inf_{x\in\Delta} D(x,p)$.

Exercice 4. E est de dimension finie et $f : E \to \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ est convexe sci propre. Le but de l'exercice est de montrer que $F := \{x \in \text{dom}\ (f), \partial f(x) \neq \emptyset\}$ est dense dans dom (f) : dom(f)=adh(F). Soit donc $x_0 \in \text{dom}\ (f)$ et $\varepsilon > 0$.

1. Montrer l'existence de $v \in E^*$ tel que $f(x_0) + f^*(v) \leq \langle x_0|v\rangle + \varepsilon$.
2. Soit $g(x) := f(x) - \langle v|x\rangle$. Montrer que $g(x_0) \leq \inf_{x\in E} g(x) + \varepsilon$ (et donc en particulier $\inf_{x\in E} g(x) > -\infty$).
3. Soit $h(x) = g(x) + \|x - x_0\|$. Montrer que h admet un minimum global y sur E.
4. Montrer que $v \in \partial f(y) + \partial\| \cdot -x_0\|(y)$ et en déduire que $\partial f(y) \neq \emptyset$.
5. Montrer que $\|y - x_0\| + \inf_{x\in E} g(x) \leq h(y) \leq g(x_0) \leq \inf_{x\in E} g(x) + \varepsilon$ et conclure.
6. Donner un exemple où $F \neq \text{dom}\ (f)$.