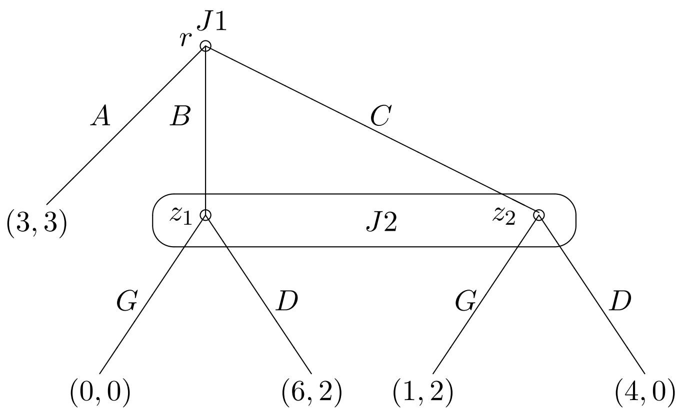
Université Paris Dauphine,
L3, Année 2017-2018
G. Vigeral

Examen de Théorie des Jeux

La calculatrice et les documents de cours ne sont pas autorisés. Les réponses doivent être justifiées.

Question de cours. Soit $\Gamma = (A, B, g)$ un jeu à 2 joueurs et à somme nulle joué en stratégies pures, où A et B sont les ensembles d'actions et g la fonction de paiement. Donner la définition d'un point selle. Démontrer ensuite que si (a^*, b^*) est un point selle, alors a^* et b^* sont optimales et que le jeu a une valeur en stratégies pures.

Exercice 1. On considère le jeu suivant.



1. Mettre le jeu sous forme normale.
2. En déduire qu'une action à déterminer du joueur 1 est jouée avec probabilité 0 dans tout équilibre de Nash.
3. Déterminer l'ensemble des équilibres de Nash du jeu
4. Parmi ceux-ci, lesquels sont Bayesien parfaits ?

Exercice 2. On considère le jeu à deux joueurs :

	A^2	B^2	C^2
A^1	$(10, 8)$	$(8, 10)$	$(0, 0)$
B^1	$(8, 10)$	$(0, 0)$	$(10, 8)$
C^1	$(0, 0)$	$(10, 8)$	$(8, 10)$

1. Vérifier que $(1/3A^1 + 1/3B^1 + 1/3C^1; 1/3A^2 + 1/3B^2 + 1/3C^2)$ est un équilibre de Nash du jeu et donner son paiement.
2. Dans cette partie on considère le jeu Γ_λ infiniment répété et λ-escompté, pour $\lambda \in]0,1[$. Pour chaque joueur i on définit la stratégie σ_i suivante
   — Jouer A^i à la première étape
   — A chaque étape suivante, jouer A^i si (A^1, A^2) a été joué à toutes les étapes précédentes. Sinon, jouer $1/3A^i + 1/3B^i + 1/3C^i$.
   (a) Quel est le paiement de chaque joueur sous (σ^1, σ^2) ?
   (b) Pour quels taux d'escompte (σ^1, σ^2) est il un équilibre de Nash du jeu infiniment répété ?
   (c) Pour quels taux d'escompte (σ^1, σ^2) est il un équilibre sous jeu parfait du jeu infiniment répété ?
3. Dans cette partie on considère le jeu répété 2 fois et à observation partielle Γ'_2 suivant. A la fin de la première étape, les joueurs n'observent pas l'action de l'autre joueur mais apprennent uniquement si le paiement d'étape était nul ou non. Ils se rappellent également de l'action qu'ils avaient joué à la première étape (et de sa réalisation si c'était une action mixte). Chaque joueur cherche à maximiser l'espérance de la moyenne de son paiement à la première étape et à la seconde étape. On considère la stratégie τ^i suivante :
   — Jouer $1/3A^i + 1/3B^i + 1/3C^i$ à la première étape.
   — Si le paiement de la première étape était nul, jouer $1/3A^i + 1/3B^i + 1/3C^i$ à la seconde étape. Sinon, rejouer l'action pure tirée aléatoirement à la première étape.
   (a) Quel est le paiement de chaque joueur sous (τ^1, τ^2) ?
   (b) Montrer que (τ^1, τ^2) est un équilibre de Nash de Γ'_2.

Exercice 3. On s'intéresse au jeu suivant. Les deux parties sont indépendantes

	G	C	D
H	$(1,3)$	$(0,0)$	$(2,2)$
B	$(0,0)$	$(1,3)$	$(3,2)$

1. Equilibres de Nash (x^*, y^*)
   (a) Déterminer les équilibres de Nash dans lesquels le premier joueur joue en stratégie pure.
   (b) On suppose à partir de maintenant que $x^*(H) = p \in]0,1[$. Montrer que $y^*(G) = 1/2$.
   (c) Montrer que l'hypothèse $y^*(C) > 0$ entraîne $p = \frac{1}{2}$ et aboutit à une contradiction.
   (d) En déduire finalement la valeur de $y^*(D)$ puis de p. Donner le paiement des deux joueurs dans cet équilibre.
2. Equilibres corrélés
   (a) Décrire l'ensemble des distributions d'équilibres corrélés.
   (b) Trouver une distribution d'équilibre corrélé donnant un paiement d'au moins 2 au premier joueur.