Université Paris Dauphine,
L3, Année 2010-2011
G. Vigeral

Examen de théorie des Jeux

La calculatrice et les documents de cours ne sont pas autorisés. Les réponses doivent être justifiées. Barème indicatif : Question de cours < Exercice 1 $\simeq$ Exercice 2 << Exercice 3.

Question de cours. Soit $\Gamma = (N, (A^i)_{i\in\mathbb{N}}, (g^i)_{i\in\mathbb{N}})$ un jeu à N joueurs et à ensembles d'action finis. Dans la suite a^i et b^i sont deux éléments de A^i.

1. Donner la définition mathématique de "a^iest faiblement dominée par b^i".
   Si $a = (a^1, \cdots, a^N)$ est un équilibre de Nash, a^i peut elle être faiblement dominée ? Si oui, donner un exemple, si non donner une démonstration.
2. Donner la définition mathématique de "a^iest strictement dominée par b^i".
   Si $a = (a^1, \cdots, a^N)$ est un équilibre de Nash, a^i peut elle être strictement dominée ? Si oui, donner un exemple, si non donner une démonstration.

Exercice 1. On considère le jeu à deux joueurs :

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} A_2 & B_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} A_1 \\ B_1 \end{array} & \begin{pmatrix} 0,0 & 6,1 \\ 1,6 & 5,5 \end{pmatrix} \end{array}$$

1. Déterminer tous les équilibres de Nash (purs et mixtes) et donner leur paiement.
2. Soit $p = p_1(A_1, A_2) + p_2(A_1, B_2) + p_3(B_1, A_2) + p_4(B_1, B_2)$ une probabilité sur les cases de la matrice. Donner les conditions que doivent vérifier p_1, p_2, p_3 et p_4 pour que p soit une distribution d'équilibre corrélé.
3. Trouver une distribution d'équilibre corrélé qui assure un paiement de 4 à chaque joueur.

Exercice 2. On considère le jeu à trois joueurs Γ suivant :

	C_2	D_2		A_2	B_2
C_1	$(4,4,4)$	$(2,7,2)$		$(2,2,7)$	$(0,5,5)$
D_1	$(7,2,2)$	$(5,5,0)$		$(5,0,5)$	$(3,3,3)$
	C_3			D_3	

1. Déterminer tous les équilibres de Nash (purs et mixtes) et donner leur paiement.
2. Dans cette question on considère le jeu Γ_λ, infiniment répété et escompté avec un taux d'escompte λ. Dans ce jeu, soit σ_i la stratégie du joueur i qui consiste à :
   – Jouer C_i à la première étape

– A chaque étape suivante, jouer C_i si tous les joueurs ont joué C à toutes les étapes précédentes, D_i sinon.

Soit σ le profil $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$. Donner son paiement, et montrer que c'est un équilibre de Nash de Γ_λ dès que λ est plus petit qu'un seuil que l'on determinera. A quelle condition σ est il un équilibre sous jeux parfait ?

3. Dans le jeu répété deux fois Γ_2, expliquer brièvement pourquoi il n'existe pas d'équilibre dans lequel le paiement du Joueur 1 est strictement supérieur à 3.

Exercice 3. On considère le jeu à deux joueurs Γ suivant : un état de la nature est choisi de manière équiprobable dans $\{K, L\}$ et est annoncé au Joueur 1 uniquement. Celui-ci choisit ensuite une action (appellée message à partir de maintenant) dans $\{A, B\}$, qui est annoncée au Joueur 2. Le Joueur 2 (qui connaît donc le message choisi par $J1$ mais pas l'état) choisit ensuite une action dans $\{H, M, B\}$. Les paiements ne dépendent pas du message, uniquement de l'état et de l'action du Joueur 2, et valent :

– Dans l'état K, $g_K(H) = (2, 12)$; $g_K(M) = (2, 4)$; $g_K(B) = (0, 0)$.

– Dans l'état L, $g_L(H) = (0, 0)$; $g_K(M) = (2, 4)$; $g_K(B) = (0, 6)$.

1. Préliminaires
   (a) Ecrire le jeu sous forme extensive.
   (b) Dans la forme normale associée (qu'on ne demande pas de donner) combien chaque joueur a t-il de stratégies ?
   (c) Donner tous les sous jeux propres de Γ.
2. Dans cette partie on cherche à trouver tous les équilibres en stratégies pures.
   (a) Déterminer tous les équilibres en stratégies pures dans lesquels le joueur 1 choisit le message A si l'état est K, et B si l'état est L. Donner leur paiement.
   (b) Déterminer tous les équilibres en stratégies pures dans lesquels le joueur 1 choisit le message A quelque soit l'état de la nature. Donner leur paiement.
   (c) Donner, sans justifier, les équilibres en stratégies pures dans les deux cas restants, ainsi que le paiement associé.
   (d) Parmi ces équilibres, lesquels sont des équilibres sous jeux parfaits ? Des équilibres bayésiens parfaits ?
3. Dans cette partie on suppose que les joueurs jouent les stratégies de comportement suivantes :
   – $J1$ joue la stratégie σ_1 "Jouer A et B avec probabilité $\frac{1}{2}$ si l'état est K ; Jouer A avec probabilité 1 si l'état est L".
   – $J2$ joue la stratégie σ_2 "Jouer M si le message est A ; Jouer H si le message est B".

   (a) Quels ensembles d'information du joueur 2 sont atteints avec probabilité positive ? Calculer les croyances du Joueur 2 dans ces ensembles.
   (b) Démontrer que (σ_1, σ_2) est un équilibre de Nash du jeu.
   (c) Est-ce un équilibre Bayesien parfait ?