Université Paris Dauphine,
L3, Année 2010-2011

Partiel de théorie des Jeux

La calculatrice et les documents de cours ne sont pas autorisés. Les réponses doivent être justifiées. L'énoncé est volontairement long et sera noté sur plus de 20.
Barème indicatif : Question de cours < Exercice 1 < Exercice 2 < Exercice 3.

Question de cours. Soit $\Gamma = (A, B, g)$ un jeu à deux joueurs et à somme nulle. Définir l'infsup et le supinf de Γ en stratégies pures. Énoncer une inégalité toujours vérifiée par ces deux quantités et la démontrer.

Exercice 1. On considère le jeu à deux joueurs et à somme nulle suivant :

$$\begin{pmatrix} 3 & 8 & 1 \\ 3 & 0 & 9 \\ -2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

1. Trouver le minmax et le maxmin en stratégies pures. Le jeu a t-il une valeur en stratégies pures ?
2. Trouver la valeur en stratégie mixte, ainsi que toutes les stratégies optimales de chaque joueur.

Exercice 2. N étudiants ($N \geq 2$) préparent le même concours. Chacun d'entre eux choisit de fournir un effort de révision $a^i \in [0, 1]$. On suppose que ces choix sont fait de manière simultanée. L'effort d'un étudiant engendre une désutilité $d^i = (a^i)^3$ due au temps qu'il passe à réviser. D'autre part, le bénéfice b_i de l'étudiant i, dû à son effort par rapport aux autres, est donné par l'écart entre son effort de révision et la moyenne des efforts des autres : $b^i = a^i - m^{-i}$, avec $m^{-i} = \frac{1}{N-1} \sum_{j \neq i} a^j$. On ne s'intéressera qu'aux stratégies pures ; les deux questions sont indépendantes.

1. Dans cette question on suppose que le gain du joueur i est
$$g^i(a^1, \cdots, a^N) = b^i - d^i = a^i - \frac{1}{N-1} \sum_{j \neq i} a^j - (a^i)^3.$$
Déterminer l'ensemble de meilleure réponse du joueur i en fonction du profil d'actions des autres joueurs. En déduire qu'il existe un équilibre en stratégies dominantes dont on calculera le paiement pour chaque joueur.
2. Dans cette question on suppose que le gain du joueur i est
$$h^i(a^1, \cdots, a^N) = (b^i)^3 - d^i = (a^i - \frac{1}{N-1} \sum_{j \neq i} a^j)^3 - (a^i)^3.$$
Déterminer l'ensemble de meilleure réponse du joueur i en fonction du profil d'actions des autres joueurs. En déduire qu'il existe un unique équilibre de Nash dont on donnera le paiement pour chaque joueur.

Exercice 3. Deux joueurs cherchent à se partager un gâteau composé de 6 parts de même taille numérotées de 1 à 6. La procédure est la suivante : le joueur 1 choisit un entier $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ et partage les parts en deux lots, le lot L_1 contenant les parts numérotées de 1 à n, et le lot L_2 contenant les parts numérotées de $n + 1$ à 6. Le joueur 2 choisit $b \in \{L_1, L_2\}$ et remporte le lot correspondant, tandis que le joueur 1 remporte l'autre lot.

Les 3 parties de l'exercice sont indépendantes. Dans chacune les fonctions de gains sont connues de tous les joueurs.

1. Dans cette partie on suppose que les joueurs choisissent leur action de manière simultanée, et que le gain de chaque joueur est la proportion du gâteau qu'il a obtenue.
   (a) Écrire la matrice du jeu et trouver les équilibres de Nash en stratégies pures.
   (b) Trouver un équilibre de Nash en stratégie mixte (on pourra remarquer que $g_1(n, b) + g_2(n, b) = 1$ pour tout profil d'action et chercher un profil qui assure un paiement de $\frac{1}{2}$ à chaque joueur).
   (c) (Plus difficile) Montrer que tous les équilibres (x^*, y^*) ont même paiement. En déduire que, dans tout équilibre, $y^* = \frac{1}{2}L_1 + \frac{1}{2}L_2$. Y a t-il unicité de l'équilibre de Nash en stratégie mixte ?
2. Dans cette partie on suppose toujours que le gain de chaque joueur est la proportion du gâteau obtenue, mais désormais le Joueur 2 observe l'action choisie par le Joueur 1 avant de choisir la sienne.
   (a) Écrire le jeu sous forme extensive avec information parfaite.
   (b) Déterminer tous les équilibres sous-jeux parfaits en stratégies pures (par exemple en mettant des flèches de couleur sur l'arbre de la question précédente). Combien y en a t-il ? Quel est le paiement dans chacun d'entre eux ?
   (c) Combien chaque joueur a t-il de stratégies dans la forme normale associée (on ne demande pas d'écrire la matrice) ?
3. Dans cette partie on suppose toujours que le Joueur 2 observe l'action choisie par le Joueur 1 avant de choisir son action, mais il y a désormais une cerise sur la part numéro 1. Le joueur 2 est friand de cerise : son gain est égal à la proportion de gâteau obtenue plus un bonus de $\frac{1}{2}$ s'il obtient la cerise. Le joueur 1 n'aime pas la cerise et la jette s'il l'obtient : son paiement est juste la proportion de gâteau obtenue.
   (a) Écrire le jeu sous forme extensive avec information parfaite.
   (b) Déterminer tous les équilibres sous-jeux parfaits en stratégies pures (par exemple en mettant des flèches de couleur sur l'arbre de la question précédente). Combien y en a t-il ? Quel est le paiement dans chacun d'entre eux ?
   (c) Trouver un équilibre de Nash en stratégies pures, de paiement $(\frac{1}{2}, 1)$ (on ne demande pas d'écrire la matrice).