Université Paris Dauphine,
L3, Année 2014-2015

Partiel d'Analyse Complexe

La calculatrice et les documents de cours ne sont pas autorisés. Toutes les réponses doivent être soigneusement justifiées ; la correction récompensera la rigueur, précision et clarté des démonstrations.

Barème indicatif : $QdC \simeq Exo1 < Exo2 \simeq Exo3 < Exo4$

On rappelle les deux résultats suivants vus en cours et TDs, que l'on pourra utiliser à loisir sans avoir à les redémontrer :

– Soit A un connexe de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et E un ensemble fini. Alors toute fonction continue de A dans E est constante.
– Lemme de Schwarz : soit f une fonction analytique sur $B_o(0,1)$ telle que $f(0) = 0$ et $|f(z)| \leq 1$ pour tout $z \in B_o(0,1)$. Alors $|f(z)| \leq |z|$ sur $B_o(0,1)$ et $f'(0) \leq 1$.

Question de cours.

1. Soit $f(z) = \sum a_n z^n$ et $g(z) = \sum b_n z^n$ deux séries entières de rayon de convergence infini. Donner sans démonstration c_n telle que $f(z)g(z) = \sum c_n z^n$.
2. Pour toute série entière de terme général a_n, rappeler la définition de son rayon de convergence R et montrer que $R = \sup\{r,\ a_n r^n \text{est bornée}\}$.

Exercice 1. Soit $R > \frac{1}{2}$ un réel. Trouver en fonction de R les fonctions f analytiques sur $B_o(0,R)$ telles que $f(1/n) = \frac{n-1}{2n+1}$ pour tout entier $n \geq 2$.

Exercice 2. On veut démontrer puis utiliser le théorème de Liouville : soit f une fonction entière (analytique sur $\mathbb{C}$) et bornée, alors f est constante. Les deux parties sont indépendantes.

1. Partie 1 : Démonstration du théorème. Soit donc M telle que$|f(z)| \leq M$ sur $\mathbb{C}$.
   (a) On suppose que $f(0) = 0$. Soit $z_0 \in \mathbb{C}$, en considérant les fonctions $f_n(z) = \frac{f(nz)}{M}$, montrer que $f(z_0)$ est nulle.
   (b) En déduire le cas général.
2. Partie 2 : Application. Soit a, b et c des réels avec $ab \neq 0$. On cherche à déterminer les fonctions entières telles que $aRe(f(z)) + bIm(f(z)) \leq c$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. On pose $\alpha = a - ib$.
   (a) Montrer que $\left|e^{\alpha f(z)}\right|$ est bornée par une constante à déterminer.
   (b) Conclure.

Exercice 3. Soit U un ouvert connexe contenant le cercle unité (mais pas forcément le disque unité), et n et m deux entiers naturels non nuls . On cherche à trouver toutes les fonctions analytiques sur U telles que $f(z)^n = z^m$, $\forall z \in U$.

1. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(t) = \frac{f(e^{nit})}{e^{mit}}$. Calculer $g(t)^n$ pour tout t.
2. On suppose que n ne divise pas m. Calculer $g(0)$ et $g(\frac{2\pi}{n})$ et conclure.
3. Répondre à la question dans le cas où $m = kn$ pour un entier non nul k.
4. Question subsidiaire : les réponses aux deux questions précédentes changeraient elles si U n'était pas connexe ?

Exercice 4. Soit a_n la suite définie par récurrence pour $n \geq 0$ par $a_0 = 2$, $a_1 = a_2 = 0$, et $(n+3)a_{n+3} + (n+2)a_{n+2} + a_n = 0$. On cherche à déterminer la somme de la série entière complexe $f(z) = \sum a_n z^n$. Les deux parties sont largement indépendantes.

1. Partie 1 : détermination du rayon de convergence.
   (a) Montrer que $|a_n| \leq 2$ pour tout $n \geq 0$.
   (b) En déduire un minorant strictement positif du rayon de convergence R de f.
2. Partie 2 : Calcul de f. Dans cette partie x est un réel.
   (a) Pourquoi f est elle dérivable sur l'intervalle $]-R, R[$?
   (b) Montrer que $\forall x \in]-R, R[$, $(1+x)f'(x) + x^2 f(x) = 0$.
   (c) Soit $g(x) = (1+x)e^{\frac{x^2}{2} - x} f(x)$. Calculer $g'(x)$ pour $x \in]-R, R[$.
   (d) En déduire la valeur de f sur $]-R, R[$, puis sur le disque ouvert complexe de centre 0 et de rayon R.
   (e) Que vaut R ?