Université Paris Dauphine,
M1, Année 2016-2017

Partiel d'Analyse Convexe approfondie

Instructions :

La calculatrice et les documents de cours ne sont pas autorisés. Toutes les réponses doivent être soigneusement justifiées ; la correction récompensera la rigueur, précision et clarté des démonstrations.

Question de cours.

1. Donner la définition épigraphique d'une fonction convexe, définir également son domaine.
2. Montrer que si f est convexe alors a) son domaine est convexe et b) $f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$ pour tout $t \in [0,1]$ et $(x, y) \in dom(f)^2$.

Exercice 1. Dans tout l'exercice $E = \mathbb{R}^n$ muni de la norme euclidienne. Soit A une matrice symétrique réelle de taille n, et b et c deux vecteurs de E. On définit f(x)=$\langle Ax|x\rangle + \langle b|x\rangle + c$.

1. Soit x dans E ; montrer que f est Fréchet-différentiable en x et calculer u tel que $D_x f(v) = \langle u|v\rangle$.
2. En déduire que f est convexe si et seulement si A est positive, c'est à dire si $\langle Ax|x\rangle \geq 0$ pour tout x dans E.
3. Dans cette question A est supposée définie positive : $\langle Ax|x\rangle > 0$ pour tout x non nul. Montrer qu'il existe $r > 0$ tel que $\langle Ax|x\rangle \geq r$ sur la boule unité. En déduire que $f(x) \to +\infty$ quand $\|x\| \to +\infty$, puis que f atteint son minimum sur E.
4. Toujours sous l'hypothèse A définie positive, montrer que $f(\frac{x+y}{2}) < \frac{f(x)+f(y)}{2}$ pour tout $x \neq y$ (c'est à dire que f est strictement convexe) et en déduire que le minimum de f sur E est atteint en un unique point.

Exercice 2. Le but de l'exercice est de démontrer le théorème de Krein-Millman : tout convexe compact non vide K de dimension finie est l'enveloppe convexe de ses points extrémaux. On rappelle que $x \in K$ est extrémal s'il n'existe pas de couple $(y, z) \in K^2$ et de réel $t \in]0, 1[$ tels que $y \neq z$ et $x = ty + (1-t)z$.

Pour tout convexe fermé C et $c \in C$ on dit que l'hyperplan $H = \{x, \langle v|x\rangle = r\}$ est un hyperplan d'appui en c à C dans la direction v si $\langle v|c\rangle = r$, $\langle v|c'\rangle \leq r$ pour tout $c' \in C$, et $\langle v|c'\rangle < r$ pour au moins un $c' \in C$. Soit donc K un convexe compact non vide et A l'ensemble de ses points extrémaux.

1. Préliminaires : les questions suivantes sont indépendantes les unes des autres et serviront dans la suite.
   (a) Montrer que $conv(A) \subset K$.

(b) On rappelle qu'un résultat du cours indique que si C est convexe fermé d'intérieur non vide et $c \in C \setminus int(C)$, alors C admet un hyperplan d'appui en c. Expliquer brièvement comment déduire de ce résultat, sans supposer K d'intérieur non vide, que K admet un hyperplan d'appui en tout $c \in K \setminus ri(K)$.

(c) Soit H un hyperplan d'appui à K, montrer que $dim(\text{Aff}(K \cap H)) < dim(\text{Aff}(K))$.

(d) Soit H un hyperplan d'appui à K. Montrer que $K \cap H$ est un convexe fermé non vide et que tout point extrême de $K \cap H$ est un point extrême de K.

2. On cherche dans cette partie à montrer que $K \subset conv(A)$ en raisonnant par récurrence sur $n = dim(\text{Aff}(K))$.
   (a) Résoudre le cas $n = 0$. On suppose dans la suite que $n > 0$ est fixé et le résultat connu pour $m < n$.
   (b) Soit $x \in K \setminus ri(K)$. En utilisant l'hypothèse de récurrence montrer que $x \in conv(A)$.
   (c) A partir de maintenant on suppose $x \in ri(K)$. Montrer qu'il existe $v \neq 0$ tel que $x+v$ et $x-v$ sont dans K.
   (d) En déduire l'existence de $y = x + tv$ et $z = x - t'v$ avec $t, t' > 0$ tels que y et z soient dans $K \setminus ri(K)$.
   (e) Montrer que $x \in conv(A)$.
3. Conclure.

Exercice 3. Soit $E = \mathbb{R}^n$ et $f_1, \cdots, f_m$ des fonctions affines de E dans $\mathbb{R}$. Pour tout i il existe donc $a_i \in E$ et $b_i \in \mathbb{R}$ tels que $f_i(x) = \langle a_i | x \rangle + b_i$. Le but de l'exercice est de démontrer le lemme de Farkas qui affirme qu'une et une seule des deux assertions suivantes est vraie :

(i) Le système d'inégalités $f_i(x) \geq 0$ admet une solution dans E.

(ii) Il existe $c_1, \cdots, c_m \geq 0$ tels que $c_1 f_1 + \cdots + c_m f_m \equiv -1$.

On définit $C \subset \mathbb{R}^m$ l'ensemble $\{(f_1(x), \cdots, f_m(x)),\ x \in E\}$, $D = (\mathbb{R}_+^*)^m$ et b le vecteur $(b_1, \cdots, b_m)$. Pour tout $1 \leq k \leq m$ on notera e^k le vecteur dont la $k-$ième coordonnée est 1 et toutes les autres 0. On note enfin s le vecteur dont toutes les coordonnées valent 0.

1. Montrer que si (i) est vraie, alors (ii) est fausse.
2. A partir de maintenant on suppose que (i) est fausse. Montrer que C et D sont convexes non vides, que D est ouvert, et qu'ils sont disjoints.
3. En déduire l'existence d'un vecteur $v \in \mathbb{R}^m$ tel que pour tout y dans C et z dans D on ait $\langle v | y \rangle < \langle v | z \rangle$.
4. Montrer que $v_k \geq 0$ pour tout k, et que $v_1 + \cdots + v_m > 0$. On pourra, pour tout k et pour tout $M > 0$, s'intéresser au vecteur $Me^k + \frac{1}{M}s \in D$.
5. Montrer que $\langle v | y \rangle \leq 0$ pour tout $y \in C$.
6. Montrer que si $y \in C$ alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ on a également $\lambda y + (1-\lambda)b \in C$. En déduire qu'il existe une constante $\mu \leq 0$ telle que $\langle v | y \rangle = \mu$ pour tout $y \in C$.
7. Conclure dans le cas $\mu < 0$.
8. Plus difficile : conclure dans le cas $\mu = 0$. On pourra raisonner par récurrence sur n.