Université Paris Dauphine,
M1, Année 2017-2018

Partiel d'Analyse Convexe approfondie

Instructions :

La calculatrice et les documents de cours ne sont pas autorisés. Toutes les réponses doivent être soigneusement justifiées ; la correction récompensera la rigueur, précision et clarté des démonstrations.

Exercice 1. Soit E un espace de Banach et f convexe de E dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

1. Question de cours : définir la dérivée directionnelle $f^+(x, v)$ au point $x \in dom(f)$ et dans la direction v. Montrer que
$$f^+(x, v) = \inf_{t>0} \frac{f(x + tv) - f(x)}{t}$$
2. Montrer que si $f^+(x, v) = 0$ pour tout v alors x est un minimum global de f.
3. Donner un exemple pour lequel la réciproque est fausse.
4. Montrer que si x est un minimum global de f alors $f^+(x, v) \geq 0$ pour tout v.
5. Si f est Gâteaux dérivable en x, montrer que x est un minimum global de f ssi $D_x f(v) = 0$ pour tout v.

Exercice 2. Soit E un espace de Banach. On note E^* l'ensemble des formes linéaires continues sur E.

1. Soit F un sous espace vectoriel fermé de E et $x \notin F$. Montrer qu'il existe $\phi \in E^*$ telle que ϕ est nulle sur F et $\phi(x) = 1$.
2. Soient $\{x_1, \cdots, x_n\}$ une famille libre de E. Montrer qu'il existe $\phi_1, \cdots, \phi_n$ dans E^* telles que $\phi_i(x_i) = 1$ et $\phi_i(x_j) = 0$ pour tout $i \neq j$.
3. En déduire que si E est de dimension infinie alors E^* également.
4. La réciproque est elle vraie ?

Exercice 3. Soit $E = \mathbb{R}^n$. Pour tout ensemble C non vide (pas forcément convexe) de E on appelle polaire de C l'ensemble
$$C^\circ := \{y \in E, \langle x, y\rangle \leq 1, \forall x \in C\}.$$

1. Calculer le polaire de B_2 la boule unité pour la norme 2.
2. Calculer le polaire de B_∞ la boule unité pour la norme infinie.
3. Montrer que C° est toujours un convexe fermé contenant 0.
4. Montrer que $C_1 \subset C_2$ implique $(C_2)^\circ \subset (C_1)^\circ$

5. Montrer que $C \subset (C^\circ)^\circ$
6. Dans cette question on suppose que C est un convexe fermé contenant 0 et soit $z \notin C$.
   (a) Montrer qu'il existe $y \in E$ et $\varepsilon > 0$ tel que $\langle x, y\rangle + \varepsilon \leq \langle z, y\rangle$ pour tout x dans C.
   (b) En considérant $y' = \frac{y}{\langle z,y\rangle - \varepsilon/2}$, montrer que $z \notin (C^\circ)^\circ$.
   (c) Qu'en déduit on sur $(C^\circ)^\circ$?
7. Soit C quelconque et $A = adh(conv(C \cup \{0\})$. Montrer que $C^\circ = A^\circ$ et en déduire une formule générale pour $(C^\circ)^\circ$.
8. Soit C tel que $C = C^\circ$. Montrer que $C \subset B_2$ puis que $C = B_2$.

Exercice 4. Soit $M_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices réelles carrées de taille n et S_n^+ le sous espace vectoriel formé des matrice symétriques positives :

$$S_n^+ := \{M \in M_n(\mathbb{R}), {}^{\mathrm{t}}M = M \text{ et } \langle x, Mx\rangle \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}^n\}$$

On rappelle que tout matrice M de S_n^+ est diagonalisable dans une base orthonormée, que ses valeurs propres sont positives et que la norme d'opérateur de M (pour la norme 2 de $\mathbb{R}^n$) est la plus grande de ces valeurs propres. Soit $K = \{M \in S_n^+,\ tr(M) = 1\}$.

1. Montrer que K est un convexe compact de $M_n(\mathbb{R})$.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|x\|_2 = 1$ on note $M_x = x\,{}^{\mathrm{t}}x \in M_n(\mathbb{R})$. Soit $C = \{M_x, \|x\|_2 = 1\}$. Montrer que $C \subset K$.
3. Calculer $M_x x$. Que peut on dire des valeurs propres, de la norme et du rang des éléments de C ?
4. On rappelle qu'un point extrémal d'un convexe A est un point a qui ne peut pas s'exprimer sous la forme $tb + (1-t)c$ avec $t \in]0, 1[$ et b et c différents de a. On cherche dans cette question à montrer que tout élément M_x de C est un point extrémal de K.
   (a) On suppose donc que $M_x = tM + (1-t)M'$ pour $t \in]0, 1[$ et M et M' dans K. Montrer que M_x, M et M' sont tous trois de norme 1.
   (b) En déduire que M et M' sont dans C. Calculer Mx et $M'x$ et conclure.
5. Montrer que $K = conv(C)$.