Université Paris Dauphine,
L3, Année 2011-2012

Rattrapage de théorie des jeux

La calculatrice et les documents de cours ne sont pas autorisés. Toutes les réponses doivent être soigneusement justifiées.

Exercice 1. On considère le jeu Γ à deux joueurs suivant. Les trois questions de l'exercice sont indépendantes.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} G & D \end{array} \\ \begin{array}{c} H \\ B \end{array} & \begin{pmatrix} 0,0 & 9,2 \\ 2,9 & 7,7 \end{pmatrix} \end{array}$$

1. Donner, sans justification, un jeu sous forme extensive dont la forme normale est Γ.
2. Trouver tous les équilibres de Nash de Γ en stratégies mixtes et donner les paiements associés.
3. Déterminer l'ensemble des distributions d'équilibre corrélé de Γ. En déduire une distribution d'équilibre corrélé donnant un paiement de 6 à chaque joueur.

Exercice 2. Soit $N \geq 2$, on considère le jeu à N joueurs Γ_N avec $A^i = [0,1]$ pour tout i. Les paiements sont :

- si $a = (a^1, a^2, \cdots, a^N) \neq (1, 1, \cdots, 1)$, alors $g^i(a) = a^i$.

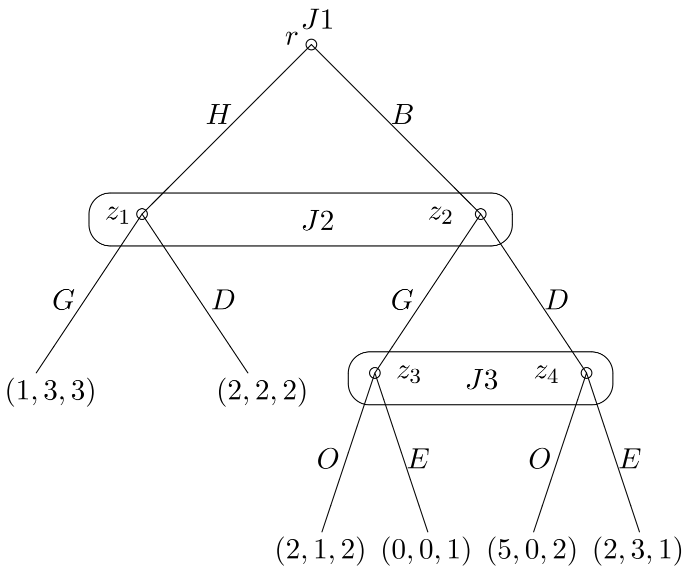
- $g^i(1, 1, \cdots, 1) = 0$ pour tout i.

1. Question de cours : rappeler la définition d'une stratégie pure strictement dominée (par une stratégie pure). Démontrer que dans tout jeu à N joueurs, si la stratégie pure a^i est strictement dominée par la stratégie pure b^i, alors $a = (a^1, a^2, \cdots, a^N)$ ne peut pas être un équilibre de Nash en stratégies pures.
2. Déterminer toutes les stratégies pures strictement dominées (par une stratégie pure) de chaque joueur dans Γ_N.
3. Trouver tous les équilibres de Nash de Γ en stratégies pures.

Exercice 3. 40 vacanciers veulent aller de la (V)ille à la (P)lage. Il y a deux chemins possibles, l'un passant par C et l'autre par D. Les trajets de V à C et de D à P se font par train et mettent 1h chacun. Le trajet de V à D se fait par la route et le temps mis dépend du traffic : il est de 10 min plus 1 minute par personne empruntant la route VD. De même le temps mis pour aller de C à P est de 10 min plus 1 minute par personne empruntant la route CP. Chaque joueur cherche à maximiser son gain, qui est l'opposé du temps (en minutes) qu'il met pour aller de V à P. On ne considère que les stratégies pures.

1. Jeu initial
   (a) Modéliser cette situation par un jeu sous forme normale. Combien chaque joueur a t-il d'actions ? Pour chaque profil d'actions a on note k le nombre de vacanciers empruntant le chemin VCP. Donner le paiement $g^i(a)$ du joueur i en fonction de a^i et de k.
   (b) Montrer que a est un équilibre en stratégies pures si et seulement si k est égal à une valeur que l'on déterminera. En déduire que dans tout équilibre, chaque joueur met un temps t que l'on déterminera.
2. Jeu modifié. On suppose maintenant que l'Etat, afin d'améliorer le temps de parcours des vacanciers, a construit une autoroute à double sens entre C et D. Chaque vacancier peut désormais aller de C à D ou de D à C en 5 minutes.
   (a) Combien chaque joueur a t-il désormais d'actions (on suppose que chaque joueur ne peut utiliser qu'une fois au plus l'axe CD) ? Pour chaque profil a on note k_1 le nombre de joueurs utilisant la route CP et k_2 le nombre de joueurs utilisant la route VD. Donner le paiement $g^i(a)$ du joueur i en fonction de a^i et de k_1 et k_2.
   (b) Question de cours : rappeler la définition d'une stratégie dominante du joueur i.
   (c) Montrer que chaque joueur possède une stratégie dominante ; en déduire qu'il existe un unique équilibre de Nash. Donner le temps mis par chaque joueur à l'équilibre et commenter.

Exercice 4. On s'intéresse au jeu à trois joueurs suivant.



1. Mettre le jeu sous forme normale.
2. Déterminer tous les équilibres Bayésien parfaits (mixtes) et leur paiement.
3. Déterminer tous les équilibres de Nash (mixtes) et leur paiement.