Université Paris Dauphine,
L3, Année 2014-2015

Rattrapage d'Analyse Complexe

La calculatrice et les documents de cours ne sont pas autorisés. Toutes les réponses doivent être soigneusement justifiées ; la correction récompensera la rigueur, précision et clarté des démonstrations.

Question de cours.

1. Donner la définition de l'indice d'un point z par rapport à une courbe γ.
2. Donner sans démonstration la formule d'Hadamard donnant le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$.
3. Donner la définition d'une fonction analytique sur un ouvert U de $\mathbb{C}$.

Exercice 1. Soit $E = \mathbb{C}\backslash\{(2n+1)i\pi,\ n \in \mathbb{N}\}$ et $f : E \to \mathbb{C}$ donnée par $f(z) = \frac{e^z}{e^z+1}$.

1. a) Montrer que f est définie et analytique sur E.
   b) f est elle holomorphe sur E ?
2. a) f est elle injective ?
   b) Montrer que $h : \mathbb{C}^* \to h : \mathbb{C}$ définie par $h(z) = \frac{z}{z+1}$ est surjective de $\mathbb{C}^*$ dans $\mathbb{C}\backslash\{0, 1\}$.
   c) En déduire que f est surjective de E dans un ensemble à déterminer.
3. a) Montrer que f est méromorphe sur $\mathbb{C}$ et donner ses pôles.
   b) Déterminer l'ordre de chaque pôle et le résidu de f en ce pôle.
   c) Soit $r \in \mathbb{R}\backslash\{(2n+1)\pi,\ n \in \mathbb{N}\}$ et $\gamma_r(t) = re^{it}$ définie sur $[0, 2\pi]$. Calculer $\int_{\gamma_r} f(z)dz$ en fonction de r.

Exercice 2. Calculer $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^6}$. On pourra considérer la fonction $f : z \to \frac{1}{1+z^6}$, le chemin γ_R constitué du segment réel $[-R, R]$ et du demi cercle supérieur de centre 0 et de rayon R (le tout 1 fois et dans le sens direct), et l'intégrale de f le long de γ_R.

Exercice 3. Dans chacun des cas, déterminer toutes les fonctions holomorphes sur $\mathbb{C}$ vérifiant l'égalité pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$.

1. $f_1(\frac{1}{n}) = e^{1/n}$
2. $f_2(e^{1/n}) = \frac{1}{n}$
3. $f_3(\frac{1}{n}) = (-1)^n e^{1/n}$
4. $(f_4(\frac{1}{n}))^3 = 1$.

Exercice 4. On considère la série entière $g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty}(n^2 + n + 1)z^n$

1. Déterminer son rayon de convergence R.
2. Trouver des réels a et b pour lesquels $n^2 + n + 1 = (n + 2)(n + 1) + a(n + 1) + b$ pour tout entier n. En déduire la valeur de g à l'intérieur du disque de convergence.
3. Pour quels points du bord du disque de convergence la série converge t-elle ?