Université Paris Dauphine,
L3, Année 2016-2017

Rattrapage d'Analyse Complexe

La calculatrice et les documents de cours ne sont pas autorisés. Toutes les réponses doivent être soigneusement justifiées ; la correction récompensera la rigueur, précision et clarté des démonstrations.

Question de cours.

1. Donner sans démonstration la formule d'Hadamard donnant le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$.
2. Donner la définition de l'indice d'un point par rapport à un lacet.
3. Enoncer, sans démonstration, le principe du prolongement analytique (hypothèses et conclusion).

Exercice 1. Calculer $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^4}$. On pourra considérer la fonction f définie sur $\mathbb{C}$ par $f : z \to \frac{1}{1+z^4}$, le chemin γ_R constitué du segment réel $[-R, R]$ et du demi cercle supérieur de centre 0 et de rayon R (le tout 1 fois et dans le sens direct), et l'intégrale de f le long de γ_R.

Exercice 2. Le but de l'exercice est de trouver l'ensembles des fonctions holomorphes f de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ vérifiant $f(z)f(-z) = 1$ pour tout z dans $\mathbb{C}$.

1. Montrer qu'il existe $R > 0$ et une suite de complexe a_n telle que sur $B_o(0, R)$ on ait $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$.
2. Montrer que $a_0 \neq 0$.
3. On suppose qu'il existe un entier $n > 0$ tel que $a_n \neq 0$; soit n_0 le plus petit tel entier. Montrer que le coefficient de z^{2n_0} dans le développement en série entière de $f(z)f(-z)$ autour de 0 est non nul, et aboutir à une contradiction.
4. En déduire que f est constante sur $\mathbb{C}$ puis déterminer l'ensemble des solutions du problème.
5. Si on suppose seulement que $f(1/n)f(-1/n) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, quel est l'ensemble des solutions du problème (f est toujours supposée holomorphe) ?
6. Trouver une fonction f holomorphe non constante telle que $f(n)f(-n) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 3. On considère la série entière $g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} n^2 z^n$

1. Déterminer son rayon de convergence R.
2. Trouver des réels a et b pour lesquels $n^2 = (n + 2)(n + 1) + a(n + 1) + b$ pour tout entier n. En déduire la valeur de g à l'intérieur du disque de convergence.

3. Pour quels points du bord du disque de convergence la série converge t-elle ?
4. Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2}{2^n}$

Exercice 4. Soit $E = \mathbb{C}\backslash\{\pi/2 + n\pi,\ n \in \mathbb{N}\}$ et la fonction tangente complexe tan : $E \to \mathbb{C}$ donnée par $\tan(z) = \frac{\sin z}{\cos z}$, où sin et cos sont le sinus et cosinus complexes.

1. a) Montrer que tan est définie sur E.
   b) tan est elle holomorphe sur E ?
2. a)Montrer que $\tan(z) = -i\frac{e^{2iz}-1}{e^{2iz}+1}$.
   b) tan est elle injective ?
   c) Soit $h : \mathbb{C}\backslash\{-1\} \to \mathbb{C}$ définie par $h(z) = \frac{z-1}{z+1}$. Calculer l'ensemble image de h.
   d) En déduire l'ensemble image de tan.
3. a) Montrer que tan est méromorphe sur $\mathbb{C}$ et donner ses pôles.
   b) Déterminer l'ordre de chaque pôle et le résidu de tan en ce pôle.
   c) Soit $\gamma(t) = \pi e^{it}$ définie sur $[0, 2\pi]$. Calculer $\int_\gamma \tan(z)dz$.