Université Paris Dauphine,
L3, Année 2010-2011
G. Vigeral

Théorie des Jeux

Feuille d'exercices 10 : Équilibres corrélés.

1. On considère le jeu de la bataille des sexes :

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} F_2 & O_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} F_1 \\ O_1 \end{array} & \begin{pmatrix} 2,1 & 0,0 \\ 0,0 & 1,2 \end{pmatrix} \end{array}$$

1. Trouver tous les équilibres de Nash, pures et mixtes
2. Décrire l'ensemble des distributions d'équilibres corrélés
3. Trouver une distribution d'équilibre corrélé qui donne un paiement strictement supérieur à 1 à chaque joueur.

2. On considère le jeu :

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} A_2 & B_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} A_1 \\ B_1 \end{array} & \begin{pmatrix} 2,0 & 0,1 \\ 0,1 & 1,0 \end{pmatrix} \end{array}$$

1. Trouver tous les équilibres de Nash, pures et mixtes
2. Décrire l'ensemble des distributions d'équilibres corrélés

3. On considère le jeu :

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} & \begin{pmatrix} 0,0 & 2,1 & 1,2 \\ 1,2 & 0,0 & 2,1 \\ 2,1 & 1,2 & 0,0 \end{pmatrix} \end{array}$$

1. Trouver tous les équilibres de Nash, pures et mixtes
2. Décrire l'ensemble des distributions d'équilibres corrélés
3. Trouver une distribution d'équilibre corrélé qui donne un paiement de $\frac{3}{2}$ à chaque joueur.
4. Trouver une distribution d'équilibre corrélé qui donne un paiement de $\frac{5}{3}$ au joueur 1, et montrer que c'est le maximum qu'il puisse obtenir.

4. On considère le jeu "de minorité", à trois joueurs :

$$\begin{array}{c} A_2 \\ B_2 \end{array} \begin{pmatrix} (0,0,0) & (0,1,0) \\ (1,0,0) & (0,0,1) \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} (0,0,1) & (1,0,0) \\ (0,1,0) & (0,0,0) \end{pmatrix}$$

$$A_3 \qquad\qquad\qquad B_3$$

1. Montrer qu'il existe un unique équilibre de Nash où chaque joueur à un paiement strictement positif (on pourra commencer par remarquer que dans un tel équilibre chaque joueur joue nécessairement de façon complètement mixte). Donner le paiement de chaque joueur dans cet équilibre
2. Décrire l'ensemble des distributions d'équilibres corrélés
3. Trouver une distribution d'équilibre corrélé qui donne un paiement de $\frac{1}{3}$ à chaque joueur.

5. Soit le jeu avec un nombre infini dénombrable de joueurs $\{1, 2, ..., n, ...\} = \mathbb{N}^*$. On suppose que tous les joueurs ont seulement deux stratégies -1 ou 1 (soit $S_i = \{-1, 1\}$). La fonction de paiement du joueur i est :

$$g_i(s) = \begin{cases} s_i, & \text{si } \sum_j s_j < \infty \\ -s_i, & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Montrer qu'il n'existe pas d'équilibre de Nash en stratégies pures.
2. En utilisant le lemme de Borel Cantelli montrer qu'il n'existe pas d'équilibre de Nash en mixte.
3. Montrer que la distribution $\mu = \frac{\mu_1}{2} + \frac{\mu_2}{2}$ sur $S = \prod_i S_i = \{0, 1\}^{\mathbb{N}^*}$ induit un équilibre corrélé, où μ_1 est la distribution (produit) $\mu_1 = \bigotimes_i \mu_1^i$ avec : $\mu_1^i(s_i = 1) = \frac{1}{i}$ et μ_2 est la distribution (jointe) qui tire le profil $(s_1 = 1, ...s_i = 1, s_{i+1} = 0, ..., s_n = 0, ...)$ avec probabilité $\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1} = \frac{1}{i(i+1)}$. (Remarquer que $P_{\mu_1}(\sum s_i = \infty) = 1$, que $P_{\mu_2}(\sum s_i = \infty) = 0$ et que $P_{\mu_2}(s_i = 1) = \frac{1}{i}$.)
   Quel est le paiement correspondant ?