Université Paris Dauphine,
M1, Année 2017-2018
G. Vigeral

Analyse convexe

Feuille d'exercices 1 : Ensembles convexes.

Dans tous les exercices E est un espace vectoriel.

1. Soit X un sous ensemble de E. On suppose que pour tout x et y dans X, $\frac{x+y}{2} \in X$.

1. Montrer que X n'est pas forcément convexe.
2. Montrer que si E est un espace vectoriel normé et X fermé dans E, alors X est convexe.

2. Soit X et Y deux convexes de E.

1. Montrer que $conv(X \cup Y) = \{tx + (1-t)y, t \in [0,1], x \in X, y \in Y\}$.
2. Donner une formule similaire pour l'enveloppe affine de l'union de 2 ensembles affines.
3. Donner une formule similaire pour l'enveloppe convexe (resp. affine) de l'union de n ensembles convexes (resp. affines).

3. Soit A un ensemble affine et $a \in A$.

1. Montrer que $A - a$ est un sous espace vectoriel de E.
2. Montrer que ce sous espace ne dépend pas de a.

4. Un ensemble C de E est un cône si pour tout $x \in C$ et $t \geq 0$, $tx \in C$. S'il est de plus convexe, on dit que c'est un cône convexe.

1. Montrer que C est un cône convexe si et seulement si pour tout $(x, x') \in C^2$ et tous t et t' réels positifs, $tx + t'x' \in C$.
2. Pour un ensemble X non vide quelconque et $x \in X$, on définit le cône radial de X en x par $R_X(x) := \{v \in E, \exists \alpha > 0, [a, a + \alpha v] \subset X\}$. Montrer que $R_X(x)$ est un cône.
3. Si X est convexe, montrer que $R_X(x)$ est un cône convexe.
4. Si A est affine, montrer que $R_A(a) = A - a$. On pourra utiliser des résultats de l'exercice précédent.

5. Un point x d'un convexe X est dit extrémal si pour tout $y, z \in X^2$ tels que $y \neq z$, et pour tout $t \in]0,1[$, $ty + (1-t)z \neq x$. Autrement dit, x ne peut être écrit comme combinaison convexe d'éléments de X que de manière triviale.

1. Montrer que x est un point extrémal de X si et seulement si $X \setminus \{x\}$ est convexe.
2. Soit A non vide quelconque et x un point extrémal de $conv(A)$. Montrer que $x \in A$.

3. Donner un exemple d'un ensemble non vide sans point extrémal.

6. La boule unité fermée B_f d'un svn E est dite strictement convexe si $\|tx + (1-t)y\| < 1$ pour tout $x \neq y$ dans B_f et tout $t \in]0,1[$.

1. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
   a) B_f est strictement convexe.
   b) Si x et y sont deux points distincts de E et $t \in]0,1[$, alors $\|tx+(1-t)y\| < \max(\|x\|, \|y\|)$
   c) Si $\|x\| = 1$, alors x est un point extrémal de B_f.
2. Si E est un espace de Hilbert, montrer que B_f est strictement convexe.
3. Soit $E = R^d$ munie de la norme infinie. B_f est elle strictement convexe ? Quels sont ses points extrémaux ?
4. Mêmes questions pour la norme un définie par $\|x\|_1 := \sum_1^d |x_k|$.

7. Dans cet exercice E est l'ensemble des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, muni de la norme infinie, et B est la boule unité fermée. On cherche à caractériser les points extrémaux de B.

1. Soit f un point extrémal, et supposons qu'il existe x_0 tel que $|f(x_0)| < 1$. Montrer qu'il existe un intervalle ouvert I non vide sur lequel $|f(x)| < 1$.
2. Construire une fonction continue g tel que $1 \geq g(x) > 0$ sur I et $g(x) = 0$ sur le complémentaire de I.
3. Construire deux fonctions distinctes f_1 et f_2 dans E telles que $f = \frac{f_1+f_2}{2}$.
4. En déduire l'ensemble C des points extrémaux de B. B est il strictement convexe ?
5. Calculer $conv(C)$ et commenter.