Université Paris Dauphine,
M1, Année 2017-2018
G. Vigeral

Analyse convexe

Feuille d'exercices 2 : Topologie des ensembles convexes.

Dans tous les exercices E est un espace vectoriel normé muni de la norme $\|.\|$.

1. Soit X un sous ensemble de E.

1. Montrer que si X est fini alors $conv(X)$ est compact.
2. Montrer que si X est ouvert alors $conv(X)$ est ouvert.
3. Pour X quelconque montrer que $adh(conv(X))$ est le plus petit convexe fermé contenant X.
4. Soit $E = \mathbb{R}^2$ et $X = \{(x, y), y(1 + x^2) \geq 1\}$. Montrer que X est fermé mais pas $conv(X)$.
5. Peut on échanger adh et conv dans la question 3 ?

2. On rappelle que le théorème de Carathéodory implique qu'en dimension finie, si X est compact alors $conv(X)$ l'est aussi. Le but de l'exercice est de donner un contre exemple en dimension infinie. On prend E l'ensemble des suites réelles dont la série associée converge absolument, muni de la norme $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{+\infty} |x_i|$. On note e_k la suite dont le k-ième terme est 1 et tous les autres 0. Soit $X = \{\frac{1}{n}e_n\} \cup \{0\}$.

1. Montrer que X est compact.
2. Montrer que $\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n}e_n \in adh(conv(X))$.
3. En déduire que conv(X) n'est pas fermé et conclure.

3. Le but de cet exercice est de montrer que l'adhérence d'un ensemble convexe précompact est précompacte. On rappelle qu'un ensemble X est précompact si pour tout $\varepsilon > 0$, X est contenu dans une union finie de boule de rayon ε. On suppose donc X convexe et précompact. On fixe $\epsilon > 0$ et des x_i tels que $X \subset \cup_{i=1}^{n} B_o(x_i, \varepsilon)$. On note $\Lambda_n = \{(\lambda_1, \cdots, \lambda_n),\ \lambda_i \geq 0, \sum \lambda_i = 1\}$ le simplexe de dimension n.

1. Soit $F : \Lambda_n \to E$ définie par $F(\lambda) = \sum \lambda_i x_i$. Montrer que Λ_n puis $F(\Lambda_n)$ sont compacts.
2. Montrer que pour tout $x \in E$, $\exists \lambda \in \Lambda_n$, $\|x - F(\lambda)\| < \varepsilon$.
3. Déduire des deux questions précédentes que X est précompact.
4. En déduire que si E est un espace de Banach et X est compact, $adh(conv(X))$ est compacte.

4. Soit $X \subset E$, on définit le coeur de X par

$$coeur(X) = \{x \in X, \forall v \in E, \exists t > 0, [x, x + tv] \subset X\}$$

1. Montrer que pour tout ensemble X, $int(X) \subset coeur(X)$
2. Soit $X = \left\{(x, y), y = 0 \text{ ou } |y| \geq x^2\right\}$. Montrer que $0 \in coeur(X)$ mais $0 \notin int(X)$.
3. On suppose désormais que X est convexe d'intérieur non vide et on cherche à montrer que $coeur(X) \subset int(X)$. Soit y dans $int(X)$ et x dans $coeur(X)$. Montrer qu'il existe $t > 0$ tel que $(1 + t)x - ty \in X$.
4. Montrer que $x \in [y, (1 + t)x - ty[$ et conclure.

5. Pour tout convexe $X \subset E$ contenant l'origine, on définit la jauge de X $j_X : E \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ par

$$j_X(v) = \inf \{t \geq 0, v \in tX\}$$

1. Déterminer la jauge de la boule unité.
2. Montrer que $j_X(tv) = tj_X(v)$ pour tout $t \geq 0$.
3. Montrer que $j_X(v + v') \leq j_X(v) + j_X(v')$.
4. Montrer que $j_X(v) < +\infty$ pour tout v si et seulement si $0 \in coeur(X)$.
5. On suppose que $0 \in int(X)$. Montrer que j_X est Lipschitzienne et donc continue. On pourra commencer par montrer que $\frac{j_X(v)}{\|v\|}$ est bornée puis utiliser la question précédente.
6. On suppose que $0 \in coeur(X)$, $X = -X$, et que pour tout v non nul il existe $t > 0$ tel que $tv \notin X$. Montrer que la jauge de X est une norme.