Université Paris Dauphine,
L3, Année 2011-2012
G. Vigeral

Théorie des Jeux

Feuille d'exercices 3 : Dominance.

1. Dilemme du prisonnier

Le fameux dilemme du prisonnier peut être modélisé par exemple sous la forme du jeu matriciel suivant $\begin{pmatrix} (3,3) & (0,4) \\ (4,0) & (1,1) \end{pmatrix}$.

1. Montrer que le jeu a un équilibre en stratégie dominante. Qu'est ce qui est surprenant ?
2. On considère maintenant le jeu $\begin{pmatrix} (3,3) & (0,2) \\ (2,0) & (-1,-1) \end{pmatrix}$. Vérifier que ce jeu donne lieu à des paiements toujours inférieurs à ceux du dilemme du prisonnier, puis montrer qu'il a un équilibre en stratégie dominante. Commenter.

2. Enchère au second prix

Un bien est mis aux enchères. Il y a n acheteurs potentiels et la procédure d'enchères est la suivante : chaque acheteur soumet une offre écrite sous pli scellé. Tous les plis sont transmis à un commissaire priseur. L'acheteur ayant soumis l'offre la plus haute emporte le bien et paye un prix égal à la seconde plus haute offre (en cas de gagnants ex-aequo, le joueur de plus petit numéro parmi les gagnants achète l'objet au prix le plus haut). Chaque acheteur i a une valuation v_i dans $\mathbb{R}_+$, qui représente la somme à laquelle il évalue le bien. S'il achète le bien au prix p, son utilité est $v_i - p$. S'il ne l'achète pas, son utilité est nulle.

1. On suppose que chaque joueur connaît les valuations de chacun. Modéliser cette enchère par un jeu sous forme normale. Montrer que la situation "chacun offre sa propre valuation" est un équilibre en stratégies dominantes. Quels sont alors les paiements de chaque joueur ?
2. Est il important que chaque joueur connaisse les valuations des autres ?
3. Expliquer rapidement pourquoi dans le cas d'une enchère au premier prix (enchères classiques) il n'y a pas d'équilibres en stratégies dominantes en général.

3. Jugement majoritaire

$2n+1$ juges doivent attribuer une note à un patineur artistique. La procédure est la suivante : chaque juge i donne indépendamment une note n_i entre 0 et 10, et la note finale N du patineur dépend des notes de tous les juges (voir plus bas). Chaque juge a un avis a_i lui aussi entre 0 et 10, et son utilité u_i vaut $-|a_i - N|$.

1. On suppose que N est la moyenne des n_i. Montrer qu'il n'y a pas de stratégies dominantes en général (on pourra se restreindre au cas de 2 juges ayant un avis de 3 et 7 par exemple).
2. On suppose que N est la médiane des n_i. Montrer qu'il existe un équilibre en stratégies dominantes.

4. Dans le jeu suivant,

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} g & d \end{array} \\ \begin{array}{c} H \\ B \end{array} & \begin{pmatrix} (2,1) & (-10^6,0) \\ (1,1) & (1,0) \end{pmatrix} \end{array}$$

que donne l'itération de l'élimination des stratégies dominées ? Commenter.

5. Jeu de la demi-moyenne

On considère le jeu suivant : chaque joueur choisit indépendamment un entier entre 0 et 100, et celui le plus près de la moitié de la moyenne de ces chiffres gagne un prix, les autres rien. S'il y a des ex-aequos le prix est partagé entre eux.

1. Que joueriez vous ?
2. A quoi conduit l'itération de l'élimination des stratégies faiblement dominées ? Commenter.

6. On considère le jeu suivant :

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} g & c & d \end{array} \\ \begin{array}{c} H \\ M \\ B \end{array} & \begin{pmatrix} 1,0 & 3,1 & 1,1 \\ 1,1 & 3,0 & 0,1 \\ 2,2 & 3,3 & 0,2 \end{pmatrix} \end{array}$$

1. Identifier toutes les stratégies faiblement dominées.
2. Choisir une stratégie faiblement dominée, l'éliminer afin d'obtenir un jeu réduit, puis répéter ce processus jusqu'à ce qu'il n'y ait plus de stratégies faiblement dominées. Montrer qu'on peut aboutir ainsi à un jeu avec (H,d) comme unique profil de stratégies mais aussi à un jeu avec (B,c) comme unique profil de stratégies.