# TD 4. Fonctions holomorphes

**Exercice 1.** Déterminer si les fonctions suivantes sont holomorphes sur $\mathbb{C}$ :

$$a(x+iy) = x + 2iy, \ b(x+iy) = \sin(x)\cosh(y) + i\cos(x)\sinh(y),$$
$$c(x+iy) = x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3), \ d(x+iy) = \sin(x) + iy\cos(x).$$

**Exercice 2.** Déterminer l'ensemble des fonctions $f$ holomorphes sur $\mathbb{C}$ dont la partie réelle est :

$$P(x+iy) = 2xy, \ P(x+iy) = x^2 - y^2 + e^{-y}\sin(x) - e^{-y}\cos(x), \ P(x+iy) = (x-y)^2.$$

**Exercice 3.** Soit $\Omega$ un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et $f$ une fonction analytique (donc holomorphe) sur $\Omega$. On note $P$ et $Q$ les parties réelle et imaginaire de la fonction $f$ et on suppose qu'il existe des nombres réels $a$ et $b$ tels que

$$\forall z \in \Omega, \ P(z) + aQ(z) + b = 0.$$

**1.a** Montrer que

$$\forall z \in \Omega, \ \partial_x P(z) = \partial_x Q(z) = \partial_y P(z) = \partial_y Q(z) = 0.$$

**1.b** En déduire que

$$\forall z \in \Omega, \ f'(z) = 0.$$

**2.a** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que

$$\forall z \in \Omega, \ f^{(n)}(z) = 0.$$

**2.b** Soit $z_0 \in \Omega$. En déduire qu'il existe un réel $R > 0$ tel que

$$\forall z \in D(z_0, R), \ f(z) = f(z_0).$$

**2.c** Conclure que la fonction $f$ est constante sur l'ouvert $\Omega$.

**Exercice 4.** Soit $u \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ harmonique. Montrer qu'il existe une fonction entière dont $u$ est la partie réelle.

**Exercice 5.** Soit $U := \mathbb{C} \setminus [0,1]$ et $f(z) = \frac{1}{z(z-1)}$ pour tout $z \in U$ montrer que pour tout $\gamma$, chemin fermé et $C^1$ par morceaux dans $U$, $\int_\gamma f(z)dz = 0$.

**Exercice 6.** Soit $U := D(1,1) \setminus \{1\}$ et

$$f(z) := \frac{1}{z(z-1)}, \ \forall z \in U$$

montrer que $f$ n'admet pas de primitive (globalement) sur $U$.

**Exercice 7.** Soit $\gamma_1$ et $\gamma_2 : [0,1] \to \mathbb{C}^*$ différentiables et fermés. Montrer que $I_{\gamma_1\gamma_2}(0) = I_{\gamma_1}(0) + I_{\gamma_2}(0)$.

**Exercice 8.** Soit $\gamma_1$ et $\gamma_2 : [0,1] \to \mathbb{C}$ différentiables et fermés et $z \in \mathbb{C}$. On suppose que

$$|\gamma_1(t) - \gamma_2(t)| < |z - \gamma_1(t)| \ \forall t \in [0,1].$$

Montrer que $I_{\gamma_1}(z)$ et $I_{\gamma_2}(z)$ sont bien définis et qu'ils sont égaux (on pourra penser à se ramener à $z = 0$ et utiliser l'exercice précédent).

**Exercice 9** (Encore une preuve du théorème de d'Alembert-Gauss)**.** Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de la forme $P(z) = a_0 + \ldots + a_{n-1}z^{n-1} + z^n$ avec $n \geq 1$.

**1.** Montrer que pour $R > 0$ assez grand on a $\forall z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| = R$ :

$$|z^n| > |a_0 + \ldots + a_{n-1}z^{n-1}|$$

et $0 \notin \{P(Re^{it}), t \in [0, 2\pi]\}$. On fixe désormais un tel $R$.

**2.** Soit $\gamma(t) := P(Re^{it})$ et $\theta(t) := R^n e^{int}$, $t \in [0, 2\pi]$, montrer que $I_\gamma(0) = I_\theta(0)$ et calculer cette valeur.

**3.** Montrer que $P$ a une racine dans $\bar{D}(0,R)$ (raisonner par l'absurde et considérer $r \mapsto I_{\gamma_r}(0)$ où $\gamma_r(t) := P(re^{it})$, $r \geq 0$ et $t \in [0, 2\pi]$ ).

**Exercice 10.** Soit $U$ un ouvert non vide de $\mathbb{C}$, $\alpha \in \mathbb{C}$ et $f$ holomorphe sur $U \setminus \{\alpha\}$ et bornée au voisinage de $\alpha$. Montrer que $f$ s'étend en une fonction holomorphe sur $U$.

**Exercice 11.** Soit $\sum a_n z^n$, une série entière de rayon de convergence égal à 1, et de somme notée $S$. On suppose que

$$\forall z \in D(0,1), \ |S(z)| < \frac{1}{1-|z|}.$$

**1.a** Soit $n \in \mathbb{N}$ et $0 < r < 1$. Quelle formule relie la valeur de $a_n$ à une intégrale qui fait intervenir la valeur de $f$ sur le cercle $S(0,r)$ ?

**1.b** En déduire que

$$|a_n| < \frac{1}{r^n(1-r)}.$$

**2.a** Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et $\forall r \in ]0,1[$, $\phi_n(r) = \frac{1}{r^n(1-r)}$. Montrer que la fonction $\phi_n$ admet un unique minimum sur $]0,1[$ que l'on calculera.

**2.b** En déduire que

$$\begin{cases} |a_0| < 1, \\ \forall n \geq 1, \ |a_n| < \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n}. \end{cases}$$

**2.c** Conclure que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ |a_n| < e(n+1).$$

**Exercice 12.** Soit $a > 0$, et $f$ une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ telle que

$$\forall z \in \mathbb{C}, \ |f(z)| \geq a.$$

**1.** Soit $\forall z \in \mathbb{C}, \ g(z) = \frac{1}{f(z)}$. Montrer que la fonction $g$ est définie, bornée et holomorphe sur $\mathbb{C}$.

**2.** En déduire que la fonction $f$ est constante sur $\mathbb{C}$.

**Exercice 13.** Calcul d'intégrales sur des chemins

**1.** Soit $\forall z \in \mathbb{C}, \ f(z) = z^2 - 1$. On considère les chemins paramétrés suivants :

$$\text{a) } \forall t \in [0,1], \ \gamma_1(t) = t + it^2, \ \text{b) } \forall t \in [0, 2\pi], \ \gamma_2(t) = 2e^{t+it},$$

$$\text{c) } \forall t \in [0, 2\pi], \ \gamma_3(t) = \cos(t) + i\sin(2t).$$

Montrer que l'intégrale de la fonction $f$ sur chacun des chemins considérés est bien définie, et calculer sa valeur.

**2.** Soit $\forall t \in [0, 2\pi], \ \gamma(t) = e^{it}$. On considère les fonctions suivantes :

$$\text{a) } \forall z \in \mathbb{C} \setminus 0, a(z) = \frac{1}{z}, \ \text{b) } \forall z \in \mathbb{C}, \ b(z) = |z^2|, \ \text{c) } \forall z \in \mathbb{C}, \ c(z) = z^2.$$

Montrer que l'intégrale sur le chemin paramétré $\gamma$ de chacune des fonctions considérées est bien définie, et calculer sa valeur.