Université Paris Dauphine,
M1, Année 2016-2017
G. Vigeral

Analyse convexe

Feuille d'exercices 6 : conjuguée de Legendre-Fenchel.

($(E, \|.\|)$ est un evn dans chaque exercice. Si E est de dimension finie muni de la norme 2, on identifie E à son dual. Sauf précision f est une fonction de E dans $\mathbb{R} \cup +\infty$.

1. A quelle condition l'indicatrice d'un ensemble $A \subset E$ est elle sci ?

2. Trouver la conjuguée de conjuguée de Legendre-Fenchel des fonctions suivantes

1. $E = \mathbb{R}$ et $f(x) = x$.
2. $E = \mathbb{R}$ et $f = \exp$.
3. $E = \mathbb{R}$ et $f = -\ln$.
4. $E = \mathbb{R}$ et $f(x) = \frac{1}{p}|x|^p$ pour $p > 1$.
5. $E = (\mathbb{R}^n, \|.\|_2)$ et f est l'indicatrice de la boule unité.
6. $E = (\mathbb{R}^n, \|.\|_2)$ et $f(x) = \|x\|_2$.
7. $E = (\mathbb{R}^n, \|.\|_2)$ et $f(x) = \frac{1}{2}\langle x|Ax\rangle$ pour une matrice A définie positive.

3. Montrer que pour tout x et y dans $\mathbb{R}$, et tout p, q tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, on a

$$|xy| \leq \frac{1}{p}|x|^p + \frac{1}{q}|y|^q.$$

En déduire l'inégalité de Hölder :

$$\langle x|y\rangle \leq \|x\|_p \|y\|_q$$

pour tout x et y dans $\mathbb{R}^n$. On pourra commencer par montrer cette inégalité quand $\|x\|_p = \|y\|_q = 1$.

4. Soit $f : E \to \mathbb{R}$ 1-Lipschitz. Montrer que $dom(f^*)$ est inclus dans la boule unité de E^*.

5. $E = (\mathbb{R}^n, \|.\|_2)$. Trouver toutes les fonctions f propres qui sont leur propre conjuguée.

6. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup +\infty$ une fonction propre et paire. Soit $f : E \to \mathbb{R} \cup +\infty$ définie par $f(x) = g(\|x\|)$. Montrer que $f^*(\phi) = g^*(\|\phi\|_*)$.

7. $E = (\mathbb{R}^n, \|.\|_2)$. Soit f convexe continue. Montrer que f est affine si et seulement si $dom(f^*)$ est un singleton.