Université Paris Dauphine,
L3, Année 2011-2012
G. Vigeral

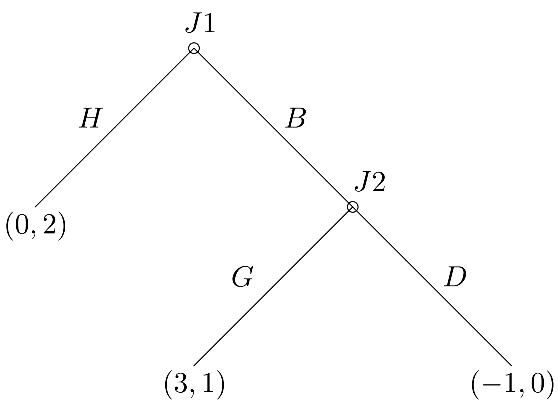
Théorie des Jeux

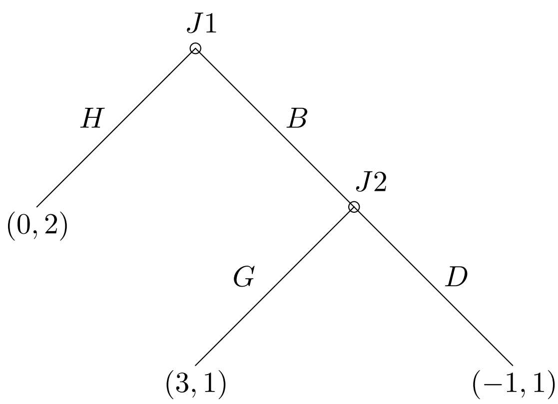
Feuille d'exercices 6 : Jeux à information parfaite.

1. Soit n un entier naturel. On considère le jeu à 2 joueurs et à somme nulle suivant. On dispose d'un tas de n allumettes. Le joueur 1 prend ou une deux allumettes, puis le joueur 2 prend une ou deux allumettes, et ainsi de suite alternativement jusqu'à ce qu'il n'y ait plus d'allumettes. Le joueur qui prend la dernière allumette a perdu. Il a un gain de -1, et l'autre joueur a un gain de 1.

1. Pour $n = 2$, $n = 3$ et $n = 4$, représenter ce jeu et dire combien chaque joueur a de stratégies dans la forme normale associée. Trouver la valeur, les stratégies optimales, et les équilibres sous-jeux parfaits pour $n = 4$.
2. Donner la valeur du jeu en fonction de n, et une stratégie optimale pour chaque joueur.

2. Pour chacun des jeux suivants :





1. Mettre le jeu sous forme normale.
2. Calculer les équilibres de Nash en stratégies pures.
3. Calculer les équilibres en stratégies mixtes. Quel est l'ensemble des paiements de ces équilibres ?
4. Calculer les équilibres sous-jeux parfaits.

3. Chomp

Pour n, m deux entiers strictement positifs, on définit le jeu à deux joueurs $G(n, m)$ suivant. Soit $P(n, m)$ l'ensemble des points du plan $\mathbb{R}^2$ à coordonnées entières positives ou nulles dont l'abcisse est strictement inférieure à n et dont l'ordonnée est strictement inférieure à m. Une pierre est placée sur chacun de ces points (il y a donc m rangées de n pierres). Le joueur 1 joue en premier. Il choisit une pierre et enlève toutes les pierres dont les deux coordonnées sont supérieures ou égales à celles de la pierre choisie. C'est ensuite au joueur 2 de jouer selon la même règle. Le jeu se poursuit en alternant les joueurs. Celui qui prend la dernière pierre a perdu.

1. Trouver une stratégie gagnante pour le joueur 1 dans $G(1, n)$, $G(2, n)$ et $G(n, n)$.
2. Montrer que dans le jeu $G(n, m)$, le joueur 1 a une stratégie gagnante (on ne demande pas de la trouver).
3. On définit de manière similaire $G(n, m)$ pour $n = \infty$ et/ou $m = \infty$. Que pensez vous de $G(n, \infty)$ pour n fini ? De $G(\infty, \infty)$?

4. Duopoles de Cournot et de Stackelberg avec demande linéaire

Deux firmes produisent le même bien à un coût unitaire égal à $\frac{1}{2}$. Si le prix du bien est p, la demande est $D(p) = 1 - p$. Chaque firme $i \in \{1, 2\}$ choisit la quantité $q^i \geq 0$ qu'elle produit. Le "marché" égalise l'offre et la demande et le prix s'établit alors à $p = 1 - (q^1 + q^2)$ (p peut être négatif). Chaque firme i vend alors la quantité q^i de bien au prix p. Chaque firme cherche à maximiser son profit. On ne considère que des stratégies pures.

1. Cournot
   On suppose que les choix se font de manière simultanée. Ecrire le jeu sous forme stratégique associé. Montrer qu'il a un unique équilibre de Nash.
2. Stackelberg
   On suppose que la firme 1 choisit sa quantité produite q_1 avant la firme 2. La firme 2 choisit la quantité q_2 qu'elle produit en connaissant q_1. Ecrire le jeu sous forme stratégique associé. Montrer qu'il existe plusieurs équilibres de Nash, mais un seul équilibre sous-jeux parfait. Le déterminer et le comparer avec l'équilibre du jeu de Cournot.

5. Une entreprise peut investir de manière risquée ou non risquée. Si elle choisit un investissement non risqué, elle obtient un gain modéré à coup sûr. Si elle choisit un investissement risqué, elle fait un gain important avec probabilité 1/2, une perte modérée avec probabilité 1/3 et fait faillite avec probabilité 1/6. En cas de faillite, l'Etat peut soit décider de sauver l'entreprise, soit de ne pas intervenir.

Les paiements pour l'entreprise et l'état sont (3 ;2) pour un gain modéré, (10 ; 4) pour un gain important, (-1 ;-1) pour une perte modérée, (-4 ;-10) pour une faillite sauvée, et (-40 ;-16) pour une faillite non sauvée.

1. Modéliser cette interaction comme un jeu sous forme extensive avec information parfaite et hasard.
2. Donner la forme normale associée, les équilibres de Nash et les équilibre sous jeux parfaits (en stratégies pures)
3. A votre avis, quelle serait une stratégie raisonnable de l'état si l'interaction ne se produit qu'une fois ? Et si l'état est successivement amené a décider de sauver ou non un grand nombre d'entreprises ?