Université Paris Dauphine
Licence de mathématiques appliquées
Analyse complexe

TD 2. Séries entières

Exercice 1. (Critère de D'Alembert) Soit $(a_n) \in (\mathbb{C}^*)^{\mathbb{N}}$ telle que $|a_{n+1}|/|a_n|$ converge vers une limite $l \in [0, +\infty]$. Calculer le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$ en fonction de l.

Exercice 2. Calculer le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$, avec a_n égal à :
$\dfrac{1}{n^2}$, $n!, \sin(\alpha n)$(discuter selon la valeur de α), $(\log(n))^2$, $\dfrac{2^n n^n}{(2n)!}$, $\dfrac{\ln(n)}{n^3 3^n}$, $e^{\sqrt{n}}$, $\left(1 + \dfrac{(-1)^n}{n}\right)^n$.

Exercice 3. Calculer le rayon de convergence de série entière $\sum e^n z^{n^2}$.

Exercice 4. Soit $f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence 1, avec $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Montrer que si $\sum a_n$ converge alors $f(x)$ converge vers $\sum a_n$ lorsque $x \to 1^-, x \in \mathbb{R}$. En déduire les identités :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln(2), \text{ et } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$$

Exercice 5. Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries convergentes à valeurs complexes, et soit

$$w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}.$$

Montrer que si $\sum w_n$ est convergente alors sa somme est égale à $\displaystyle\sum_n u_n \sum_k v_k$.

Exercice 6. Soit $f(z) = \sum_n a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $+\infty$, avec $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Montrer que si la série converge uniformément alors f est un polynôme.

Exercice 7. Soit P un polynôme à cœfficients complexes.
1. Montrer qu'il existe une constante $C_0 > 0$ et un entier d tels que pour tout $z \in \mathbb{C}$ on ait

$$|P(z)| \leq C_0(1 + |z|^d).$$

2. En déduire que le rayon de convergence de la série entière $\sum P(n) z^n$ est plus grand que 1.
3. Montrer que si P n'est pas identiquement nul le rayon de convergence de $\sum P(n) z^n$ est exactement égal à 1.

Exercice 8. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n z^n$ ainsi que sa somme sur l'intervalle $]-R, +R[$ de l'axe réel, avec a_n égal à :

$$\frac{4^n + 5^n}{2^n}, \ \cos(2n), \ \frac{\sin(n)}{n!}, \ \frac{2^n}{(n+1)!}.$$

Exercice 9. Soit $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ montrer que

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b),$$
$$\sin(a+b) = \cos(a)\sin(b) + \sin(a)\cos(b).$$

Exercice 10. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations $\cos(z) = 0$ et $\mathrm{sh}(z) = 0$.