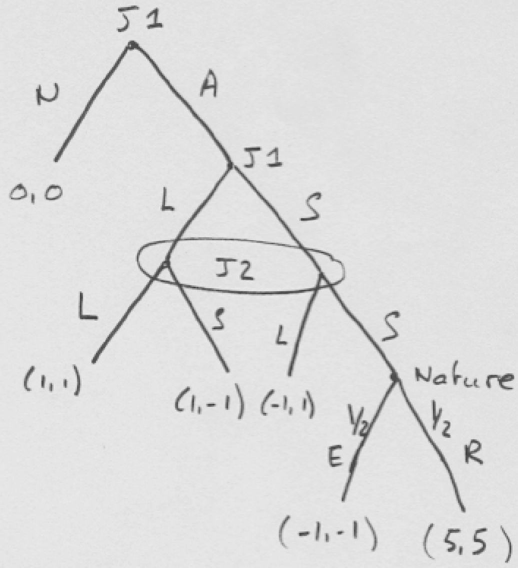
# Partiel de théorie des jeux : corrigé (L3 MIDO, Mars 2010)



## Exercice 1 :

1) Anouk = J1
Basile = J2

Forme extensive :




2) Anouk a 4 stratégies : NL, NS, AL et AS.
Elle a 3 stratégies réduites : N, AL et AS
Basile a 2 stratégies, et 2 stratégies réduites : L et S.

3) La forme normale est :

| | L | S |
|---|---|---|
| NL | 0,0 | 0,0 |
| NS | 0,0 | 0,0 |
| AL | 1,1 | 1,-1 |
| AS | -1,1 | 2,2 |

4) Les stratégies NL et NS sont strictement dominées par AL. Le jeu a donc les mêmes équilibres que le jeu suivant :

| | L | S |
|---|---|---|
| AL | 1,1 | 1,-1 |
| AS | -1,1 | 2,2 |

Il y a deux équilibres purs : (AL, L) et (AS, S).
Il n'y a pas d'équilibres où l'un des joueurs joue en pur et pas l'autre, car quand l'un des joueurs joue en pur l'autre a toujours une unique

meilleure réponse. 

Enfin, en notant $x$ (resp. $y$) la stratégie consistant à jouer AL avec probabilité $x$ (resp. L avec probabilité $y$), $(x,y)$ est un équilibre complètement mixte

$$\text{ssi} \begin{cases} 0 < x, y < 1 \\ u_1(AL, y) = u_1(AS, y) \\ u_2(x, L) = u_2(x, S) \end{cases} \quad \text{ssi} \begin{cases} 0 < x, y < 1 \\ 1 = -y + 2(1-y) \\ 1 = -x + 2(1-x). \end{cases}$$

$$\text{ssi} \begin{cases} 0 < x, y < 1 \\ y = x = 1/3 \end{cases} \quad \text{ssi} \quad x = y = 1/3.$$

Il y a donc un (et un seul) équilibre complètement mixte : jouer AL avec probabilité 1/3, AS avec probabilité 2/3 pour J1
jouer L ———————, S ——————— J2.

Exercice 2 :

Voici un exemple :

| | G | C | D |
|---|---|---|---|
| H | 5 | -3 | -6 |
| M | 1 | 0 | 2 |
| B | -7 | -4 | 8 |

H est meilleure réponse à G.
M ——————— C
B ——————— D

G est meilleure réponse à B
C ——————— M
D ——————— H

donc aucune stratégie n'est strictement dominée, et il y a un équilibre pur : MC.

Comme l'énoncé était mal posé, on pouvait aussi être malin et donner l'exemple suivant :

| | G |
|---|---|
| H | 0 |

Ex 3 :

1) Pour tout $x \in [0,1[$, jouer $x$ est strictement dominé par jouer $x' = \frac{1+x}{2}$ (où n'importe quel $x'$ dans $]x,1[$ ), car pour tout $y \in [0,1]$, $u_1(x,y) = x < x' = u_1(x',y)$.

2) Supposons que $(x,y)$ soit un équilibre. Puisque $x$ est une meilleure réponse à $y$, $x$ n'est pas strictement dominée, donc $x=1$. Par symétrie, $y=1$. Donc $(x,y) = (1,1)$. Mais $(1,1)$ n'est pas un équilibre car $u_1(1/2,1) = 1/2 > 0 = u_1(1,1)$. Il n'y a donc pas d'équilibres.

Ex 4 :

I. 1) $s_1$ est strictement dominée s'il existe $\sigma_1 \in \Delta(S_1)$ telle que: $\forall \sigma_2 \in \Delta(S_2)$, $u_1(\sigma_1,\sigma_2) > u_1(s_1,\sigma_2)$.

2) Si $\exists \sigma_1 \in \Delta(S_1), \forall \sigma_2 \in \Delta(S_2), u_1(\sigma_1,\sigma_2) > u_1(s_1,\sigma_2)$

alors $\forall \sigma_2 \in \Delta(S_2), \exists \sigma_1 \in \Delta(S_1), u_1(\sigma_1,\sigma_2) > u_1(s_1,\sigma_2)$

Car la première propriété, où le $\sigma_1$ est valable pour tout $\sigma_2$, est plus forte.

3) Non, par exemple dans le jeu suivant

| | G | D |
|---|---|---|
| H | 1,1 | 1,1 |
| B | 1,0 | 0,0 |

B est faiblement dominée par H mais est meilleure réponse à G.

Ex 4

II . 4) Le joueur II peut garantir $w$ s'il existe $\sigma_2 \in \Delta(S_2)$ telle que, pour tout $s_1 \in S_1$, $g(s_1, \sigma_2) \leq w$.

(on peut dire : pour tout $\sigma_1 \in \Delta(S_1)$, $g(\sigma_1, \sigma_2) \leq w$, c'est équivalent).

5) Soit $\sigma_2 \in \Delta(S_2)$. Puisque $s_1$ n'est jamais meilleure réponse, il existe $\sigma_1 \in \Delta(S_1)$ telle que $u_1(\sigma_1, \sigma_2) > u_1(s_1, \sigma_2)$

donc $g(\sigma_1, \sigma_2) > 0$. Donc $\max\limits_{\sigma_1 \in \Delta(S_1)} g(\sigma_1, \sigma_2) > 0$.

Comme c'est vrai pour tout $\sigma_2 \in \Delta(S_2)$, on a :

$$\min_{\sigma_2 \in \Delta(S_2)} \max_{\sigma_1 \in \Delta(S_1)} g(\sigma_1, \sigma_2) > 0.$$

(on utilise ici que c'est un min, et pas seulement un inf.).

6) $\Gamma$ est un jeu matriciel (jeu à 2 joueurs et à somme nulle fini). D'après le théorème du minmax, il a donc une valeur et des stratégies optimales. De plus la valeur $v$ est égale au minmax donc d'après 5, $v > 0$. Soit $\sigma_1$ une stratégie optimale du joueur I. On a :

$$\forall \sigma_2 \in \Delta(S_2),\ g(\sigma_1, \sigma_2) \geq v > 0, \text{ donc}$$

$$\forall \sigma_2 \in \Delta(S_2),\ u_1(\sigma_1, \sigma_2) > u_1(s_1, \sigma_2).$$

donc $\sigma_1$ domine strictement $s_1$.