Chapitre 1

Introduction

Attention : ces notes n'ont pas encore été relues calmement et comportent donc sans doute de nombreuses fautes de frappes.

1.1 Interactions stratégiques et théorie des jeux

1.1.1 Interactions stratégiques

Une interaction stratégique est une situation présentant les caractéristiques suivantes :

- un certain nombre d'entités (individus, entreprises, gouvernements, etc.) prennent des décisions (ils se comportent de telle ou telle manière).

- l'ensemble des décisions prises, ainsi que le hasard, détermine une issue (quelque chose qui se passe).

- les agents ont des préférences sur les issues possibles.

On s'intéresse en général au cas où chacun des agents est en un certain sens “rationnel", et cherche donc à prendre les décisions qui conduiront aux issues qu'il préfère.

Mettons nous un instant dans la peau d'un agent. Un point fondamental est que l'issue de l'interaction ne dépend pas seulement de ce que je fais, mais aussi de ce que font les autres. Un comportement donné de ma part peut donc conduire à une issue que j'apprécie si les autres se comportent de telle manière, et à une issue que je déteste s'ils se comportent de telle autre manière. Pour choisir mon comportement de manière optimale, il faut donc que j'essaie de deviner ce que vont faire les autres. On fait alors face à un problème de circularité : pour choisir mon comportement, j'essaie de deviner ce que vont faire les autres. Mais les autres, pour choisir leur comportement, essaient de deviner ce que je vais faire. La situation est donc très intriquée.

Un exemple. Pour bien faire comprendre qu'un comportement n'est pas bon en soit mais peut être bon ou mauvais suivant le comportement des autres, considérons un exemple de la vie courante. Supposons que deux personnes, P1 et P2, marchent dans la rue, au milieu du même trottoir mais dans des sens opposés, si bien qu'elles vont se heurter si elles ne dévient pas de leur trajectoire. Leur but est de ne pas se heurter. Pour cela, chacune doit décider de dévier légèrement vers la droite (sa droite) ou vers la gauche (le trottoir n'est pas large et si l'une des personnes reste au centre, elles se heurtent). Si les deux personnes dévient vers leur droite respectives, ou si les deux dévient vers leur gauche respective, elles s'évitent et sont contentes. Si l'une dévie vers sa droite et l'autre vers sa gauche, elles se heurtent et ne sont pas contentes. Dans cette situation, devier vers sa droite n'est pas en soit un bon ou un mauvais comportement. C'est un bon comportement si l'autre dévie vers sa droite également, et un mauvais sinon.

1.1.2 Théorie des jeux

Un jeu est un modèle d'interaction stratégique, et la théorie des jeux est l'étude formelle de tels modèles. Le mot "jeu" vient du fait que la plupart des jeux de sociétés (comme les échecs ou le poker) peuvent être vus comme des exemples d'interaction stratégiques. Toutefois, il ne s'agit pas d'analyser principalement les jeux de sociétés ! Les applications de la théorie des jeux sont nombreuses et variées : en économie (concurrence entre entreprises, enchères, etc.), sciences politiques (théorie du vote, relations internationales), écologie et biologie de l'évolution (concurrence pour la survie et la reproduction), ou encore en informatique théorique.

La théorie des jeux est une théorie relativement jeune : bien qu'il y ait eu nombre de précurseurs, elle est véritablement née en 1944 avec le livre de John von Neumann et Oskar Morgenstern : Theery of Games and Economic Behavior. C'est une théorie en croissance et qui s'applique dans des domaines de plus en plus variés.

Afin de bien faire comprendre qu'il ne s'agit pas de l'étude des jeux de société, la théorie des jeux est parfois appelée "théorie de la décision en interaction".

Mise en garde : la théorie des jeux étudie des modèles d'interactions stratégiques. Comme toujours avec les modèles, il s'agit de simplifier la situation qu'on cherche à étudier pour qu'elle devienne analysable, et cette simplification peut être excessive. De plus, pour pouvoir dire quelque chose du comportement des agents, nous serons amenés à faire des hypothèses (par exemple le fait que les agent sont rationnels, qu'ils connaissent non seulement leurs préférences mais aussi celles des autres, etc.)

Si un jour vous cherchez à appliquer des outils de théorie des jeux, il ne faudra pas bêtement utiliser tel ou tel concept introduit dans ce cours, mais prendre du recul, et se demander : 1) si votre modélisation du problème est pertinente ; 2) sous quelles hypothèses le concept que vous voulez appliquer est pertinent et si ces hypothèses sont réunies.

1.2 Représentation des préférences

Soit X l'ensemble des issues possibles d'un jeu. Pour être bien défini, le jeu doit spécifier les préférences des acteurs (les joueurs) sur ces issues. Dans le cadre de ce cours, nous supposerons toujours que les préférences d'un acteur donné, disons du joueur i, peuvent être représenté par une fonction $u_i : X \to \mathbb{R}$ appelée fonction d'utilité du joueur i. L'interprétation est la suivante : si x et y sont des issues possibles du jeu, le joueur i préfère x à y si $u_i(x) \geq u_i(y)$. Il préfère strictement x à y si $u_i(x) > u_i(y)$.

Dans le cas où l'issue du jeu ne dépend pas seulement du comportement des joueurs mais aussi du hasard, le comportement des joueurs ne détermine plus une issue donné mais une distribution de probabilité sur les issues, qu'on appelle une loterie. Il faut alors spécifier non seulement les préférences des joueurs sur les issues possibles, mais aussi leurs préférences sur les loteries. Si l'on note $\mathcal{L}$ l'ensemble des loteries possibles, on supposera :

- d'une part, que les préférences du joueur i sur les loteries peuvent être représentées par une fonction $U_i : \mathcal{L} \to \mathbb{R}$, c'est à dire qu'il existe une telle fonction U_i telle que le joueur i préfère la loterie l à la loterie l' si et seulement si $U_i(l) \geq U_i(l')$

- d'autre part, qu'on peut trouver une telle fonction U_i qui est l'espérance d'une fonction $u_i : X \to \mathbb{R}$. Le joueur i cherchera donc à maximiser l'espérance de la fonction u_i et l'on précisera ses préférences en donnant u_i. Cette dernière hypothèse s'appelle l'hypothèse de l'espérance d'utilité.

Les justifications et les faiblesses de l'hypothèse de l'espérance d'utilité seront en partie décrites dans le cours d'économie de l'incertain. Contentons nous de mentionner ici que, même en l'absence de hasard, l'hypothèse selon laquelle les préférences d'un agent peuvent être représentée par une fonction d'utilité ne va pas de soi, comme le montrent les exemples suivants.

Exemple 1.2.1 Supposons qu'il y a trois issues possibles A, B et C. Considérons un agent qui préfère strictement A à B, B à C, et C à A. Ces préférences ne peuvent pas être représentées par une fonction d'utilités (prouvez-le !). Le problème vient ici du fait que les préférences de l'agent ne sont pas transitives.

Exemple 1.2.2 Supposons par exemple que l'ensemble des issues possibles est $\mathbb{R}^2$ et que les préférences de l'agent correspondent à l'ordre lexicographique : il préfère (x_1, x_2) à (x'_1, x'_2) si et seulement si $x_1 > x'_1$ ou ($x_1 = x'_1$ et $x_2 \geq x'_2$). Ces préférences sont parfaitement transitives. Pourtant, on peut montrer que ces préférences ne peuvent pas être représentées par une fonction d'utilité. Ceci est dû au fait que ces préférences ne sont pas, en un certain sens, continues.[1]

1.3 Représentation d'un jeu

Il existe deux manières courantes de représenter un jeu : la forme extensive, et la forme normale. Commençons par donner une idée informelle de la forme extensive.

1.3.1 Forme extensive : une description informelle

Nous donnerons plus tard une description précise de la forme extensive d'un jeu. Nous nous contentons pour l'instant d'une description informelle.

[1] Supposons par l'absurde que ces préférences puissent être représentées par une fonction d'utilité $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Soit x un réel. Puisque l'agent préfère $(x, 1)$ à $(x, 0)$, on doit avoir $u(x, 1) > u(x, 0)$. L'ensemble des rationnels étant dense dans $\mathbb{R}$, on peut donc trouver un rationnel q_x dans l'intervalle $]u(x, 0), u(x, 1)[$. De plus, si y Soit l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Q}$ qui à x associe q_x. Si $x < y$, l'agent préfère $(y, 0)$ à $(x, 1)$ on a $q_x < u(x, 1) < u(y, 0) < q_y$. L'application f est donc strictement croissante, donc injective. Il existe donc une injection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{Q}$. Comme $\mathbb{Q}$ est dénombrable, cela implique que $\mathbb{R}$ est dénombrable, or ce n'est pas le cas. Les préférences de l'agent ne peuvent donc pas être représentées par une fonction d'utilité.

La forme extensive d'un jeu est une description détaillée de l'interaction, qui prend quand c'est possible la forme d'un arbre sur lequel on précise :

- quels sont les acteurs (qu'on appelle les joueurs)
- qui joue quand
- l'information dont disposent les joueurs quand ils doivent agir
- les actions possibles des joueurs
- le rôle du hasard
- les utilités (aussi appelées paiements) associées aux issues du jeu.[2]

(Les formes extensives de la plupart des jeux suivants ont été données encours)

Exemple 1.3.1 Deux agents, appelés joueur 1 et joueur 2, ont des relations commerciales fondées sur la confiance. Le jeu dure au maximum 4 périodes. Aux étapes impaires (resp. paires) le joueur 1 (resp. 2) décide de respecter ses engagements (C) ou non (A). A chaque période où un joueur respecte ses engagements, chacun gagne un point d'utilité. Si un joueur ne respecte pas ses engagements, à cette période il gagne 2 points d'utilités et l'autre 0, puis l'interaction se termine. Si les joueurs respectent toujours leurs engagements, l'interaction se termine à la fin de la quatrième période.

Les exemples 1.3.2 à 1.3.4 sont des exemples de jeux à un seul joueur, également appelés problèmes de décision.

Exemple 1.3.2 (jeu de l'initié) Un joueur peut décider d'acheter (action A) ou de ne pas acheter (action S, pour "sortir du jeu") un actif risqué. S'il n'achète pas, son paiement est de 0. S'il achète, il se produit avec probabilité 1/2 un évènement favorable (F), et avec probabilité 1/2 un évènement défavorable (D). Le joueur apprend si l'événèment a été favorable ou non (mais "le marché" ne le sait pas). Puis il peut décider soit de vendre (V) son actif risqué tout de suite, soit de le conserver (C). S'il vend tout de suite, son utilité est de -1. S'il le conserve : à la période suivante, le marché apprend si l'événement a été favorable ou non. Le joueur a un paiement de 2 si l'événement a été favorable et de -3 s'il a été défavorable.

Exemple 1.3.3 (jeu du non-initié) Même chose, sauf que le joueur n'apprend qu'à la fin si l'événement a été favorable ou non.

Exemple 1.3.4 (jeu de l'initié recevant un signal bruité) Même chose sauf que maintenant le joueur reçoit un signal bruité sur la réalisation de l'événement. Si l'événement a été favorable (resp. défavorable) , il reçoit le signal favorable avec probabilité p_1 et défavorable avec probabilité $1 - p_1$ (resp. $p_2 < p_1$ et $1 - p_2$)

Exemple 1.3.5 (jeu de l'initié devant trouver un acheteur quand il veut vendre) Même chose sauf qu'il y a deux joueurs. Si le premier joueur veut vendre son actif à la première période, le deuxième joueur accepte ou refuse d'acheter. S'il accepte, le joueur 1 obtient -1 et le joueur 2 obtient 4 si l'événement a été favorable et -2 s'il a été défavorable (l'action a une valeur plus

[2]Lorsque nous emploierons le terme "paiements" tout court, ce sera toujours au sens d'utilité, et non de paiements monétaires.

grande pour le joueur 2 que pour le joueur 1, peut-être parce qu'elle est assortie d'un droit de vote qui intéresse plus le joueur 2 que le joueur 1). Si le joueur 2 refuse, ses paiements sont de 0, le J1 conserve son actif et a les paiements correspondants.

Les exemples précédents sont des exemples de jeux finis (jeux avec un nombre fini de joueurs, et où chacun a un nombre fini de plan d'actions possibles). Dans les exemples suivants, on suppose que les joueurs ont une infinité d'actions possibles, ce qui rend la description sous forme d'arbre plus difficile. On peut toutefois visualiser le déroulement du jeu à l'aidre d'un arbre “symbolique" (par exemple, si un joueur doit choisir une valeur dans $[0,1]$, on représentera le choix des valeurs extrêmes, 0 et 1, qu'on relie par un trait continu pour indiquer que le joueur a aussi tous les choix intermédiaires ; puis on représente la suite du jeu à partir d'un choix générique du joueur 1).

Exemple 1.3.6 (Jeu de Stackelberg à 2 firmes avec demande linéaire) Deux firmes produisant le même bien, la meneuse et la suiveuse, sont en concurrence en quantité sur un marché. La meneuse (joueur 1) choisit la quantité $q_1 \in \mathbb{R}_+$ qu'elle produit. Puis, connaissant q_1, la suiveuse (joueur 2) choisit la quantité q_2 qu'elle produit. Le prix du vente du bien est $p = 1 - q$, où $q = q_1 + q_2$ est la quantité totale produite. Le coût de production de la firme i est $C_i(q_i) = c_i q_i$ où c_i est une constante positive. Le profit de la firme i est donc $\pi_i(q_1, q_2) = (1 - q_1 - q_2)q_1 - c_i q_i$. L'utilité des firmes est égale à leur profit.[3]

Exemple 1.3.7 (jeu de Cournot à n firmes général) : n firmes produisant le même bien sont en concurrence sur un marché. Sans connaître la décision des autres firme, la firme i choisit la quantité de bien $q_i \in \mathbb{R}^+$ qu'elle produit, au coût de production global $C_i(q_i)$. Le prix de vente p est fonction uniquement de la quantité totale produite $q = \sum_{1 \leq i \leq n}$. Le profit de la firme i est $\pi(q_1, ..., q_n) = pq_i - C_i(q_i)$. On suppose que l'utilité de la firme i est égale à son profit.

Remarque : le jeu ci-dessus n'est pas entièrement décrit puisqu'on n'a pas précisé la fonction de demande inverse (la fonction f telle que $p = f(q)$) ni les fonctions de coûts des firmes (les C_i). On prend souvent un coût de prodution linéaire et identique pour toutes les firmes : $C_i(q_i) = cq_i$, ainsi qu'un prix décroissant linéairement avec la quantité produite : $p = a - bq$, où a, b et c sont des réels positifs. On obtient alors le jeu de Cournot à n firmes symétriques avec coût fixe nul, coût marginal constant et demande linéaire.

1.3.2 Stratégies

Une stratégie réduite d'un joueur est un plan d'action décrivant ce qu'il fait dans toutes les situations où il peut être amené à jouer, sauf celles qui ne se produisent pas si son plan d'action a été correctement exécuté.

[3]Supposer que le coût de production soit linéaire ne signifie pas qu'on pense qu'en pratique les coûts de production d'une entreprise soient exactement linéaires. De même, supposer que l'utilité des firmes est égale à leur profit ne signifie pas qu'on pense qu'en pratique, le seul but d'une entreprise soit de maximiser son profit. Au passage, noter qu'on emploie souvent le mot firme, par opposition à entreprise, pour désigner un modèle extremement simpliste d'entreprise, prise comme un bloc dont l'organisation n'est pas détaillée et le seul but la maximisation du profit.

Une stratégie complète est un plan complet d'action décrivant ce que le joueur fait dans toutes les situations où il peut être amené à jouer, même celles qui ne se produisent pas si son plan d'action a été correctement exécuté. On peut y penser en imaginant qu'on délègue l'action à quelqu'un d'autre et qu'on lui laisse une série d'instructions complètes qui lui disent ce qu'il doit faire, en prévoyant qu'il ne va peut-être pas toujours les exécuter correctement et qu'il faut donc aussi lui dire ce qu'il doit faire dans les situations qui ne devraient pas se produire.

Exemple 1.3.8 Considérons le jeu de l'exemple 1.3.1. A la première étape le joueur 1 a le choix entre arrêter l'interaction (ce qu'on note A_1 : arrêter à l'étape 1) et continuer (ce qu'on note C_1). A la troisième, il a le choix entre arrêter (A_3) et continuer (C_3). Il a donc 4 stratégies complètes possibles : A_1A_3, A_1C_3, C_1A_3 et C_1C_3. Bien sûr, si les stratégies A_1A_3 et A_1C_3 sont correctement exécutés, elles induisent la même issue quelle que soit la stratégie du joueur 2. C'est pourquoi le joueur 1 n'a que trois stratégies réduites : A_1 (arrêter à l'étape 1 et on ne spécifie pas la suite car c'est inutile si le plan d'action est correctement exécuté), C_1A_3 et C_1C_3. De même, avec des notations similaires, le joueur 2 a 4 stratégies complètes : A_2A_4, A_2C_4, C_2A_4 et C_2C_4, mais seulement 3 stratégies réduites : A_2, C_2A_4 et C_2C_4.

Dans une situation pratique, il est souvent plus facile de réfléchir en terme de stratégies réduites. Il peut être naturel de se dire : il est très peu probable que je n'exécute pas correctement mon plan d'action, donc à quoi bon se casser la tête à établir une stratégie complète ; si jamais à un moment je n'exécute pas correctement mon plan d'action, je réfléchirai à ce moment là à ce que je dois faire par la suite. [4,5]

Pourtant, établir une stratégie complète est parfois préférable. C'est notamment le cas : - lorsqu'on que l'enjeu est important et qu'on n'aura pas le temps de reréfléchir si on se retrouve dans une situation imprévue.

- lorsqu'on délègue l'action à quelqu'un d'autre, et qu'on n'est pas sûr qu'il exécutera correctement le plan d'action ni qu'il saura réagir comme il le faut s'il se retrouve dans une situation imprévue.

L'histoire suivante illustre ce point : Manon est une petite fille dont le chat aime bien dormir dans la machine à laver. Sa maman lui a demandé de laver une nappe. Elle lui a laissé les instruction suivantes : 1) vérifier que le chat n'est pas dans la machine. S'il y est, l'en faire sortir ; 2) mettre la nappe et le détergent dans la machine, refermer la porte, mettre sur 90° et

[4]Même si c'est un point qu'on ne modélisera pas explicitement, établir une stratégie complète est a priori plus coûteux qu'établir une stratégie réduite (cela demande plus de temps et d'efforts). Si la probabilité de mal éxécuter son plan d'action est faible, ou qu'on sait qu'on aura le temps de reréfléchir en cours d'interaction, ou si l'enjeu est faible (les paiements du jeu ne sont pas très importants), n'établir qu'une stratégie réduite peut être tout à fait rationnel.

[5]Dans certains jeux, comme les échecs, même établir une stratégie réduite n'est pas possible (il y en a plus que le nombre d'atomes dans l'univers). La manière d'opérer est alors (grosso-modo) la suivante : on remplace la forme extensive réelle par une forme extensive approchée obtenue en envisageant les différentes situations possibles d'ici quelques coups et en remplaçant la suite de la description de l'interaction par un noeud terminal avec comme paiement une évaluation des paiements qu'on s'attend à obtenir à partir de cette situation. Cette évaluation s'obtient à partir de son expérience du jeu. On joue alors ce qu'on jouerait dans le jeu approché. On recommence ce processus à chaque coup.

appuyer sur marche ; 3) quand la machine sonne, ouvrir la porte, retirer la nappe et l'étendre. Quand elle rentre à la maison, la mère trouve Manon en pleurs. Que s'est-il passé ?

Réponse : la petite fille n'a pas réussi à faire sortir le chat de la machine. Ne sachant pas ce qu'elle devait faire dans ce cas, craignant d'être grondée si elle ne lavait pas la nappe, et se disant qu'après tout le chat serait plus propre si on le lavait lui aussi, elle a continué d'exécuter les instructions... La mère aurait du donner des instructions plus complètes.

De même, quand vous expliquez à un ami comment venir chez vous, même s'il n'aura pas de problèmes s'il suit correctement vos indications, il est bon de préciser : "si tu es perdu, téléphone-moi à tel numéro." On ne sait jamais.

L'intérêt d'une stratégie complète apparaît également quand un joueur représente en fait une équipe de joueurs (une entreprise par exemple).

Exemple 1.3.9 Considérons à nouveau le jeu de l'exemple 1.3.1. Supposons que le joueur 1 représente une entreprise, qui, par exemple, tient un stand quelque part, et que ce ne soit pas la même personne qui tienne le stand tous les jours. Plus précisément, supposons que cette entreprise a trois employés : Alain, Bernard, et la responsable Céline. Alain tient le stand lors de l'étape 1, et Bernard lors de l'étape 3. Céline leur donne des instructions. On peut imaginer qu'elle dise à Alain : "joue A_1", et qu'elle dise à Bernard : "Normalement tu ne devrais pas avoir à intervenir, mais si jamais Alain se trompe et que tu dois choisir entre A_3 et C_3, joue A_3". Elle spécifie ainsi une stratégie complète.

Autre histoire similaire : vous êtes le chef d'une équipe d'agents secrets dont vous devez définir la stratégie pour une mission. Vous soupçonnez que certains agents ont été retournés par l'ennemi, si bien qu'il est probable qu'ils n'éxécutent pas correctement les instructions que vous leur donnerez. Mieux vaut alors définir une stratégie complète.

Le principal intérêt des stratégies complètes est peut-être le suivant : quand on cherche à anticiper le comportement des autres joueurs, on raisonne souvent en terme de stratégies complètes, même si l'on ne cherche qu'à établir une stratégie réduite.

Exemple 1.3.10 Supposons que vous êtes le joueur 1 dans le jeu de l'exemple 1, et que vous essayiez d'anticiper le comportement du joueur 2. Vous pourriez faire le raisonnement suivant : supposons qu'on soit à l'étape 4 ; si le joueur 2 joue A_4 il obtient 5, et s'il joue C_4 il obtient 4. Il va donc jouer A_4, et j'aurai un paiement de 3. Donc si jamais on arrive à l'étape 3 et que je choisis C_3, j'obtiendrai un paiement de 3. Donc mieux vaut choisir A_3, qui me donne 4. Mais le joueur 2 va l'anticiper. Du coup, si on arrive à l'étape 2, il va se dire que s'il joue C_2, il obtiendra un paiement de 2, alors qu'il peut avoir 3 en jouant A_2. Donc il va jouer A_2, et donc à la première étape, je dois jouer A_1.

Dans ce raisonnement, appelé raisonnement par induction à rebours (ou induction amont), le joueur 1 prévoit que, si on arrive à l'étape pertinente, le joueur 2 jouera A_4 à l'étape 4 et A_2 à l'étape 2. Il prévoit donc une stratégie complète du joueur 2. En un certain sens, la seule chose qui compte au final dans la prévision du joueur 1, c'est qu'il pense que si on arrive à l'étape 2, le joueur 2 va jouer A_2, c'est à dire la stratégie réduite du joueur 2. Mais pour arriver à anticiper cette stratégie réduite, le joueur 1 a besoin de réfléchir en terme de stratégies complètes.

Conclusion : même si la notion de stratégie réduite peut vous sembler plus intuitive, la notion de stratégie complète est parfois préférable, et c'est cette notion que les théoriciens des jeux privilégient. C'est comme ça, que ça vous plaise ou non ! Dans la suite du cours, sauf précision contraire, stratégie voudra donc dire stratégie complète.

Ne pas confondre stratégies et bonnes stratégies ! Un autre point important est qu'il ne faut pas confondre les stratégies possibles (c'est à dire tous les plans d'actions possibles, y compris les plus stupides) et les "bonnes" stratégies. *Les stratégies possibles ne dépendent pas des paiements ; les bonnes stratégies en dépendent évidemment.*

Insistons : déterminer les stratégies possibles répond à la question "quels sont les comportements *possibles* ?" ; déterminer les "bonnes" stratégies répond à la question : "quels sont les comportement *intelligents* ?".

Exemple 1.3.11 (Pierre-Papier-Ciseaux contre un enfant naïf) Supposons que vous jouiez à Pierre-Papier-Ciseaux contre un enfant naïf qui annonce systématiquement ce qu'il joue avant vous. Vous pouvez donc faire dépendre votre action de la sienne. Si vous cherchez à le battre, il est clair que la meilleure stratégie est de jouer Pierre quand il joue Ciseaux, Papier quand il joue Pierre, et Ciseaux quand il joue Papier. Cela n'empêche pas que vous avez d'autres stratégies possibles : par exemple, jouer systématiquement Pierre, ou bien faire exprès de perdre (c'est à dire "jouer Papier quand l'enfant joue Ciseaux, Ciseaux quand il joue Pierre, et Pierre quand il joue Papier"). En fait, vous avez 27 stratégies possibles. Le lecteur consciencieux essaiera de comprendre pourquoi.

Terminons cette section par une définition : un profil de stratégies est la donnée d'une stratégie pour chaque joueur. Par exemple, dans l'exemple 1.3.1, un profil de stratégies possible est (A_1A_3, C_2A_4). Dans l'exemple 1.3.1, chaque joueur a 4 stratégies. Il y a donc 16 profil de stratégies possibles.

1.3.3 Forme normale (ou forme stratégique)

Définition

La forme normale d'un jeu ne rentre pas dans les détails du déroulement de l'interaction, mais se borne à préciser l'ensemble des joueurs, l'ensemble des stratégies possibles pour chaque joueur et les paiements associés à chaque profil de stratégies. Un jeu sous forme normale G est donc la donnée d'un triplet :

$$G = \{I, (S_i)_{i\in I}, (u_i)_{i\in I}\}$$

où I est l'ensemble des joueurs, S_i l'ensemble des stratégies du joueur i, et $u_i : \times_{j\in I} S_j \to \mathbb{R}$ est la fonction de paiement du joueur i.[6]

[6]Remarque : les notations $\times_{j\in I} S_j$ et $\prod_{j\in I} S_j$ ont le même sens. Elles désignent toutes les deux le produit cartésien des ensembles de stratégies des joueurs, c'est à dire l'ensemble des profils de stratégies. On note souvent $S = \times_{j\in I} S_j$.

Exemple 1.3.12 (dilemme du prisonnier). Dans le jeu du dilemme du prisonnier, il y a deux joueurs ; le joueur 1 et le joueur 2. Les joueurs ont chacun deux stratégies possibles : C (coopérer) et D (faire défection). Si les deux joueurs jouent C (resp. D), ils ont une utilité de 3 (resp. -1). Si un joueur joue C et l'autre joue D, celui qui a joué C a une utilité de -2 et l'autre une utilité de 4. La forme normale est donc donnée par : $I = \{1, 2\}$, $S_1 = S_2 = \{C, D\}$ et en notant $u = (u_1, u_2)$: $u(C, C) = (3, 3)$, $u(C, D) = (-2, 4)$, $u(D, C) = (4, -2)$ et $u(D, D) = -1$.

Il est commode de présenter ces informations sous forme de la bimatrice suivante :

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} C & D \end{array} \\ \begin{array}{c} C \\ D \end{array} & \begin{pmatrix} 3,3 & -2,4 \\ 4,-2 & -1,-1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Cette bimatrice se lit ainsi : le joueur 1 choisit la ligne, le joueur 2 la colonne. Les paiements correspondant sont écrits dans la case correspondant à cette ligne et cette colonne. Dans chaque case, le premier paiement est celui du joueur 1, le second celui du joueur 2.

Forme normale des jeux sous forme extensive

Pour mettre un jeu sous forme extensive sous forme normale, il suffit de déterminer l'ensemble des stratégies des joueurs et les paiements associés à chacun des profils de stratégies. Dans les exemples ci-dessous, on représentera les jeux sous forme normale par des bimatrices.

Exemple 1.3.13 *La forme normale du jeu de l'exemple 1.3.1 est :*

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} A_2A_4 & A_2C_4 & C_2A_4 & C_2C_4 \end{array} \\ \begin{array}{c} A_1A_3 \\ A_1C_3 \\ C_1A_3 \\ C_1C_3 \end{array} & \begin{pmatrix} 2,0 & 2,0 & 2,0 & 2,0 \\ 2,0 & 2,0 & 2,0 & 2,0 \\ 1,3 & 1,3 & 4,2 & 4,2 \\ 1,3 & 1,3 & 3,5 & 4,4 \end{pmatrix} \end{array}$$

Dans un jeu où le hasard intervient sous la forme d'un tirage au sort de la "Nature", un profil de stratégies ne détermine pas une issue, mais une distribution de probabilité sur les issues. Les paiements associés sont alors l'espérance des paiements sous cette distribution de probabilité.

Exemple 1.3.14 Considérons l'exemple 1.3.5. Pour les actions du joueur 2, on utilisera les notations suivantes : A : acheter ; S (pour "Sortir du jeu") : ne pas acheter ; V (resp. V') : tenter de vendre après un événement favorable (resp. défavorable) ; C (resp. C') : conserver l'actif après un évènement favorable (resp. défaborable). Les actions possibles du joueur 2 sont R : refuser d'acheter, et A' : accepter d'acheter. Le joueur 1 a donc 8 stratégies AVV', AVC', ACV', etc. Le joueur 2 a deux stratégies : R et A'.

La forme normale est la suivante :

$$
\begin{array}{c}
 \\
AVV' \\ AVC' \\ ACV' \\ ACC' \\ SVV' \\ SVC' \\ SCV' \\ SCV'
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cc} R & A' \end{array} \\
\begin{pmatrix}
-1,1 & -1,0 \\
-2,2 & -1/2,0 \\
1/2,-1 & -1/2,0 \\
-1/2,0 & -1/2,0 \\
0,0 & 0,0 \\
0,0 & 0,0 \\
0,0 & 0,0 \\
0,0 & 0,0
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

Bien voir que la Nature intervient dans la forme extensive mais a disparu de la forme normale.

Forme normale réduite

La forme normale réduite d'un jeu s'obtient à partir de la forme normale en regroupant les stratégies équivalentes, au sens où ces stratégies induisent les mêmes paiements quelles que soient les stratégies des autres joueurs. La forme normale réduite d'un jeu sous forme extensive s'obtient en deux temps : 1) on écrit la forme normale qu'on obtiendrait en ne considérant que les stratégies réduites au lieu des stratégies complètes ; 2) en général on en reste là, mais si jamais plusieurs stratégies réduites sont équivalentes, on les regroupe. [7]

Exemple 1.3.15 *La forme normale réduite des jeux des exemples 1.3.1 et 1.3.5 sont respectivement :*

$$
\begin{array}{c}
A_1 \\ A_1 \\ C_1A_3 \\ C_1C_3
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccc} A_2 & C_2A_4 & C_2C_4 \end{array} \\
\begin{pmatrix}
2,0 & 2,0 & 2,0 \\
1,3 & 4,2 & 4,2 \\
1,3 & 3,5 & 4,4
\end{pmatrix}
\end{array}
\quad \text{et} \quad
\begin{array}{c}
 \\ AVV' \\ AVC' \\ ACV' \\ ACC' \\ S
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cc} R & A' \end{array} \\
\begin{pmatrix}
-1,1 & -1,0 \\
-2,2 & -1/2,0 \\
1/2,-1 & -1/2,0 \\
-1/2,0 & -1/2,0 \\
0,0 & 0,0
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

Autres exemples

A écrire.

Jeux avec des formes extensives différentes mais la même forme normale

Des jeux qui ont des formes extensives différentes peuvent avoir la même forme normale.

Exemple 1.3.16 *Considérons les jeux suivants : dans le premier jeu, le joueur 1 a deux possibilités : entrer en compétition avec le joueur 2 (E) ou sortir du jeu (S). Si le joueur 1 entre,*

[7] Il y a en fait deux notions de forme normale réduite, selon que l'on dit que deux stratégies d'un joueur sont équivalente si elle lui donnent les mêmes paiements (à lui, mais pas forcément aux autres) ou si elles donnent les mêmes paiements à tous les joueurs).

le joueur 2 peut alors soit combattre le joueur 1 (C), soit accepter sa présence (A). Si le joueur 1 sort du jeu, les paiement sont $(1,3)$ *(1 pour le joueur 1 et* 3 *pour le joueur 2). S'il entre, les paiements sont* $(2,2)$ *si le joueur 2 accepte sa présence et* $(0,0)$ *si le joueur 2 combat. On peut penser à une situation où le joueur 2 est une entreprise en situation de monopole sur un marché et le joueur 1 une autre entreprise qui pourrait venir lui faire concurrence, ce que le joueur 2 aimerait éviter. Dans le premier jeu, les deux joueurs choisissent simultanément une action. Le joueur 1 choisit soit E soit S, et le joueur 2 soit C soit A. Les paiements sont* $(1,3)$ *si les joueur 1 joue* S *(quelle que soit l'action du joueur* 2*),* $(2,2)$ *si les joueurs jouent* (E,A) *et* $(0,0)$ *si les joueurs jouent* (C,C)*. Le lecteur est invité à vérifier que ces deux jeux ont des formes extensives différentes (dans le deuxième, le joueur* 2 *ne sait pas quelle action a choisi le joueur* 1 *au moment de choisir son action), mais qu'ils ont la même forme normale.*

Le fait que deux jeux avec des formes extensives différentes puissent avoir la même forme normale indiquent bien que la forme extensive d'un jeu est une description plus détaillée de l'interaction que la forme normale. Toutefois, la forme normale semble contenir toutes les informations utiles : les plans d'actions possibles, et les paiements associées aux différents choix de plans d'actions possibles. Il est donc légitime de se demander si la forme normale est une représentation suffisante de l'interaction. C'est un sujet de débats acharnés.

A propos de l'exemple précédent, deux points de vue s'affrontent. Le premier est que les deux jeux sont réellement différents. Ainsi, dans le premier jeu, comme le joueur 2 connaît l'action du joueur 1 au moment de choisir la sienne, on peut faire un raisonnement par induction à rebours et prévoir que les joueurs joueront (E,A). Dans le deuxième jeu, un raisonnement par inductions à rebours est impossible, puisque les joueurs choisissent leur action simultanément. Cela indique bien que l'analyse de ces deux jeux est différente, et qu'ils ne doivent donc pas être considéré comme représentant la même situation.

Le deuxième point de vue est que, malgré les apparences, ces deux jeux présentent de manières différentes le même problème de décision, et que des joueurs rationnels ne devraient pas se faire influencer par des effets de présentation. Pour décider de son comportement, le joueur 2 n'a pas a attendre de savoir si le joueur 1 a joué E ou pas. Il peut très bien se fire : si jamais le joueur 1 joue E, je choisirai telle action, et le décider à l'avance. Ca ne change rien à son problème de décision. Tout se passe donc comme si les décisions se prenaient simultanément, c'est à dire comme dans le deuxième jeu, et l'on n'a pas besoin de savoir si l'on se trouve dans le premier ou le deuxième jeu pour savoir quel plan d'action choisir.

Nous n'entrerons pas davantage dans ce débat et nous contenterons de deux remarques :

i) si l'on interagit avec des joueurs qui, àtort ou à raison, tiennent comptent de la forme extensive et pas seulement de la forme normale pour choisir leur comportement, il faut aussi tenir compte de la forme extensive. En effet, ce que l'on doit jouer dépend de ce que jouent les autres, et ce que jouent les autres dépend alors de la forme extensive.

ii) si jamais les joueurs ne prennent qu'une décision et qu'ils la prennent tous simultanément, tout le monde s'accorde à dire qu'il n'y a pas de différences entre la forme extensive et la forme normale. La représentation sous forme normale est donc tout particulièrement adaptée à ce type d'interactions.

Chapitre 2

Jeux sous forme normale

Je ne sais pas si je taperai ce chapitre. Je vous invite à consulter le polycopié de Jérôme Renault, qui donnait un cours similaire en MIDO avant moi. Ce polycopié est accessible via un lien sur la page web du cours.