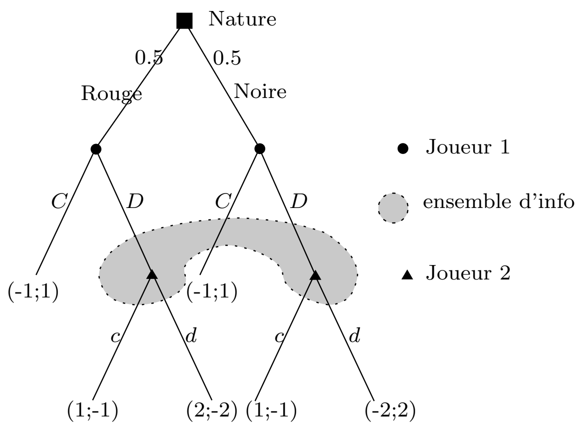
Correction examen théorie des jeux 2009-2010

July 13, 2010

Exercice 1

1) jeu sous forme extensive (à gauche) et forme normale (à droite):



	c	d
C_RC_N	(-1;1)	(-1;1)
C_RD_N	(0;0)	$(-1.5; 1.5)$
D_RC_N	(0;0)	$(0.5; -0.5)$
D_RD_N	(1;-1)	(0;0)

Dans le jeu sous forme normale, la notation de la stratégie C_RD_N signifie que le joueur 1 après avoir vu une carte Rouge (indice R) choisit de se Coucher (C) et après avoir vu une carte Noire (indice N) choisit de Doubler sa mise (D).

Le paiement (-1.5;1.5) est obtenu en remarquant qu'avec probabilité 0.5 la carte est Rouge, donc le joueur 1 se couche est le paiement est (-1;1) et avec probabilité 0.5 la carte est Noire, le joueur 1 Double sa mise, le joueur 2 aussi, donc le paiement est $(-2; 2)$. L'espérance du paiement est donc $0.5 * (-1, 1) + 0.5 * (-2; 2) = (-1.5, 1.5)$.

Vu qu'il est spécifié que le jeu est à somme nulle, on aurait pu écrire uniquement les paiements du joueur 1 (au lieu du couple des paiements).

2) Équilibres de Nash et stratégies optimales:

a) Dans un jeu à deux joueurs à somme nulle, un couple de stratégies optimales est un équilibre de Nash. Réciproquement, tout équilibre de Nash est un couple de stratégies optimales.

b) Le paiement d'un équilibre de Nash est donc égal à la valeur du jeu à somme nulle.

3) Stratégies dominées

Les stratégies C_RC_N et C_RD_N sont strictement dominées par la stratégie D_RD_N. Il n'y a pas d'autres stratégies faiblement ou strictement dominées. On peut remarquer que C_RD_N est aussi faiblement dominée par D_RC_N

4) Valeur du jeu et stratégies optimales Après élimination des stratégies strictement dominées, le jeu se ramène à :

	c	d
$D_R C_N$	(0;0)	$(0.5; -0.5)$
$D_R D_N$	(1;-1)	(0;0)

Il n'y a pas d'équilibres en stratégies pures, on va donc chercher un équilibre de Nash (d'après la question précédente, équilibre de Nash et stratégies optimales coincident) en stratégie mixte.

La stratégie mixte $(x, 1-x)$ du joueur 1 rend le joueur 2 indifférent entre c et d à la condition que: $x * 0 + (1-x) * -1 = x * -0.5 + (1-x) * 0$ donc si $x = 2/3$. De la même façon la stratégie mixte $(y, 1-y)$ du joueur 2 rend le joueur 1 indifférent entre $D_R C_N$ et $D_R D_N$ si $y * 0 + (1-y) * 0.5 = y * 1 + (1-y) * 0$ donc si $y = 1/3$.

Les stratégies optimales sont donc $\frac{2}{3} D_R C_N + \frac{1}{3} D_R D_N$ pour le joueur 1 et $\frac{1}{3} c + \frac{2}{3} d$ pour le joueur 2. La valeur du jeu est obtenue en calculant le paiement du joueur 1 à cet équilibre, qui est égal à $1/3 * 0 + 2/3 * 0.5 = 1/3$.

Exercice 2

Éliminer des stratégies faiblement dominées peut éliminer des équilibres:

Dans le jeu

	G	D
H	(0;0)	(0; 0)
B	(0;0)	(1;0)

(H, G) est un équilibre de Nash, mais la stratégie H est faiblement dominée par la stratégie B. L'élimination des stratégies faiblement dominée élimine donc cet équilibre.

Exercice 3

1) Existence d'une stratégie gagnante:

G_n^1 est un jeu sous forme extensive, fini, à information parfaite (chaque joueur sait toujours à quel noeud de l'arbre le jeu se trouve), sans hasard, et qui se termine toujours par la victoire d'un des joueurs (pas forcément toujours le même, peu importe). On sait qu'il existe alors une stratégie gagnante pour un des joueurs. On peut d'ailleurs la construire grâce à une induction amont (aussi appelée à rebours).

2) Exemple de stratégies gagnantes:

Le joueur 1 a une stratégie gagnante dans G_1^1, G_4^1 et G_5^1. Dans G_2^1 et G_3^1 c'est le joueur 2.

Dans G_4^1, le joueur 1 choisit à la première étape de faire 2 paquets de 2 allumettes. Quel que soit le choix du paquet du joueur 2, ce dernier sera obligé de faire 2 paquets de 1 allumette et le joueur 1 n'à plus qu'à choisir n'importe quel paquet de 1 allumette.

3) Détermination de $\mathbf{N}^\alpha$ et $\mathbf{N}^\beta$:

a) L'énoncé précise que, par définition du jeu, le joueur i gagne dans le jeu G_1^i, donc $1 \in N^\alpha$. Soit $n \geq 2$ fixé.

Supposons qu'il existe n_1 tel que $1 \leq n_1 \leq n-1$, $n_1 \in N^\beta$ et $n - n_1 \in N^\beta$. Alors dans les deux jeux $G_{n_1}^1$ et $G_{n-n_1}^1$ le joueur 2 a une stratégie gagnante. Par symétrie entre les joueurs, le joueur 1 a une stratégie gagnante dans les deux jeux $G^2_{n_1}$ et $G^2_{n-n_1}$. Revenons au jeu G^1_n, il suffit donc au joueur 1 de choisir à la première étape n_1. En effet, le joueur 2 a alors le choix entre le jeu $G^2_{n_1}$ et $G^2_{n-n_1}$ mais dans les deux cas le joueur 1 a une stratégie gagnante. Ce dernier va donc gagner quel que soit le choix du joueur 2. Donc :

$$\exists n_1, 1 \leq n_1 \leq n - n_1, n_1 \in N^\beta \text{ et } n - n_1 \in N^\beta \Longrightarrow n \in N^\alpha$$

Supposons maintenant que $n \in N^\alpha$. Donc le joueur 1 a une stratégie gagnante dans G^1_n. Une telle stratégie décrit le choix à la première étape d'un certain n_1 tel que $1 \leq n_1 \leq n-1$ et ensuite tel que quel que soient les choix du joueur 2, le joueur 1 a toujours une réponse qui lui assure la victoire. On rappelle qu'à la première étape le joueur 2 a le choix entre $G^2_{n_1}$ et $G^2_{n-n_1}$. S'il choisit $G^2_{n_1}$ alors en continuant de suivre sa stratégie gagnante (dans G^1_n) le joueur 1 est assuré de gagner dans ce sous-jeu. De même, si le joueur 2 a choisit $G^2_{n-n_1}$.

Ainsi, le joueur 1 a une stratégie gagnante dans $G^2_{n_1}$ et $G^2_{n-n_1}$. Par symétrie entre les joueurs, le joueur 2 a une stratégie gagnante dans $G^1_{n_1}$ et $G^1_{n-n_1}$. Donc $n_1 \in N^\beta$ et $n - n_1 \in N^\beta$. Ainsi:

$$n \in N^\alpha \Longrightarrow \exists n_1, 1 \leq n_1 \leq n - n_1, n_1 \in N^\beta \text{ et } n - n_1 \in N^\beta$$

Pour la seconde équivalence. Vu que soit le joueur 2, soit le joueur 1, a une stratégie gagnante:

$$\begin{aligned} n \in N^\beta &\Longleftrightarrow n \notin N^\alpha \\ &\Longleftrightarrow \text{ non } \left(\exists n_1, 1 \leq n_1 \leq n - n_1, n_1 \in N^\beta \text{ et } n - n_1 \in N^\beta\right) \\ &\Longleftrightarrow \forall n_1, 1 \leq n_1 \leq n - n_1, n_1 \notin N^\beta \text{ ou } n - n_1 \notin N^\beta \\ &\Longleftrightarrow \forall n_1, 1 \leq n_1 \leq n - n_1, n_1 \in N^\alpha \text{ ou } n - n_1 \in N^\alpha \end{aligned}$$

b) Soit $p \in \mathbb{N}$. On appelle H_p l'hypothèse de récurrence suivante :

$$H_p : \left\{ \forall k \leq p ; \{5k-1, 5k, 5k+1\} \cap \mathbb{N}^* \subset N^\alpha \text{ et } \{5k+2, 5k+3\} \subset N^\beta \right\}$$

H_0 est vraie car $1 \in N^\alpha$, $2 \in N^\beta$ et $3 \in N^\beta$, d'après la question 1.

Soit $p \in \mathbb{N}$. Supposons H_p vraie et montrons qu'elle implique H_{p+1}.

- $5(p+1) - 1 = 5p + 4 \in N^\alpha$ car 2 et $5p + 2$ sont dans N^β d'après H_p;
- $5(p+1) = 5p + 5 \in N^\alpha$ car 2 et $5p + 3$ sont dans N^β d'après H_p;
- $5(p+1) + 1 = 5p + 6 \in N^\alpha$ car 3 et $5p + 3$ sont dans N^β d'après H_p;
- $5(p+1) + 2 = 5p + 7 \in N^\beta$. En effet, soient n_1 et n_2 tels que $5p + 7 = n_1 + n_2$. Il existe $p_1, p_2 \in \mathbb{N}$ et $k_1, k_2 \in \{-1, 0, 1, 2, 3\}$ tels que $n_1 = 5p_1 + k_1$ et $n_2 = 5p_2 + k_2$. Si $k_1 \in \{2, 3\}$ alors nécessairement $k_2 \in \{-1, 0\}$ (car $k_1 + k_2$ est congru à 2 modulo 5). Donc, d'après l'hypothèse de récurrence[1] si $n_1 \notin N^\alpha$, $n_2 \in N^\alpha$.

[1] Pour être extrêmement rigoureux, il faudrait remarquer que $n_1 \leq 5p+6$ et donc il faut utiliser l'hypothèse de récurrence H_p ainsi que les trois points précédents

- $5(p+1)+3 = 5p+8 \in N^\beta$. Comme précédemment, soient n_1 et n_2 tels que $5p+8 = n_1 + n_2$. Il existe $p_1, p_2 \in \mathbb{N}$ et $k_1, k_2 \in \{-1, 0, 1, 2, 3\}$ tels que $n_1 = 5p_1 + k_1$ et $n_2 = 5p_2 + k_2$. Si $k_1 \in \{2, 3\}$ alors nécessairement $k_2 \in \{1, 0\}$ (car $k_1 + k_2$ est congru à 3 modulo 5). Donc si $n_1 \notin N^\alpha$, $n_2 \in N^\alpha$.

Ainsi H_{p+1} est vraie.

4) Premier coup d'une stratégie optimale dans $\mathbf{G^1_{104}}$

104 est de la forme $5p-1$ avec $p = 21$, donc d'après la question précédente le joueur 1 avait une stratégie gagnante dans G^1_{104}, et le premier coup du joueur 1 peut être par exemple de faire un tas de 102 allumettes et un autre tas de 2 allumettes. Il aurait aussi été possible de faire deux tas de 7 et 97 allumettes, 12 et 92, etc.

Exercice 4

1) Stratégies pures

Dans ce jeu, une stratégie pure du joueur 1 est une fonction de $\{0, 1\}$ dans $\mathbb{R}$, *i.e.* donner, pour chaque qualité possible, un prix . Une stratégie du joueur 2 est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\{O, N\}$, *i.e.* dire, pour chaque prix, s'il accepte (O) ou refuse (N) l'offre.

2) Absence d'équilibre pur avec des biens de qualité 1 vendus:

a) Si l'on suppose que des biens de qualité 1 sont vendus alors nécessairement le joueur 2 accepte d'en acheter au prix proposé. Il accepte donc les offres au prix p_1.

b) Un vendeur ayant un bien de qualité 1 et le vendant au prix p_1 gagne $p_1 - 1$ tandis qu'il gagne 0 sans vendre. Comme on a supposé que le bien est vendu, il est nécessaire que le prix du vendeur maximise son paiement, donc nécessairement $p_1 - 1 \geq 0$, d'où $p_1 \geq 1$.

Si le vendeur propose un bien de qualité 0 à un prix p_0 inférieur à p_1 alors il aurait strictement plus en proposant le prix p_1. En effet supposons que le bien est vendu au prix p_0; il aurait aussi été vendu au prix p_1 (car l'acheteur accepte l'offre p_1) et donc le gain du vendeur est strictement supérieur. Si l'on suppose au contraire que le bien n'est pas vendu au prix p_0, il est par contre vendu au prix p_1. Donc le vendeur gagne strictement plus en proposant p_1 (qui est supérieur ou égal à 1) qu'en ne le vendant pas au prix p_0. Donc nécessairement $p_0 \geq p_1$.

c) Si $p_0 > p_1$, alors $p_0 \neq p_1$ et $p_0 > 0$. Comme $p_0 \neq p_1$, étant donnée la stratégie du vendeur, l'acheteur peut connaître la qualité du bien directement à partir du prix ; comme de plus $p_0 > 0$, l'acheteur a intérêt à refuser les offres au prix p_0 (les accepter revient à acheter à un prix strictement positif une voiture de qualité nulle). Il les refuse donc, puisqu'on suppose que les stratégies des joueurs forment un équilibre. Par conséquent, le vendeur gagnerait davantage en proposant pour les biens de qualité nulle $p_0 = p_1$ (car $p_1 > 0$ et les offres au prix p_1 sont acceptés par hypothèse), ce qui contredit l'hypothèse que les stratégies des joueurs forment un équilibre.

Supposons alors que $p_0 = p_1$. Si l'acheteur accepte l'offre, il gagne $-p_1$ avec probabilité $2/3$ et $2 - p_1$ avec probabilité $1/3$, soit un gain espéré de $2/3 - p_1 < 0$ car $p_1 \geq 1$. Donc la meilleure réponse de l'acheteur est de ne pas acheter et réaliser un gain de 0.

En conclusion, dans un équilibre pur, aucun bien n'est vendu (car le vendeur sera toujours incité à faire passer un bien de mauvaise qualité pour un bien de bonne qualité).

3) Avec des certificats:

a) Une stratégie pure du joueur 1 est une fonction de $\{0,1\}$ dans $\{C, NC\} \times \mathbb{R}$, *i.e.* dire, pour chaque qualité q du bien, s'il obtient le certificat et quel prix il propose. Une stratégie du joueur 2 est une fonction de $\{C, NC\} \times \mathbb{R}$ dans $\{O, N\}$, *i.e.* dire, étant donnés un certificat (ou non) et un prix, s'il accepte l'offre ou pas.

b) Supposons que le joueur 2 ait les croyances suivantes "aucun bien avec certificat n'est de qualité 1 et une proportion 1/3 de ceux qui n'ont pas de certificat sont de qualité 1" et que sa stratégie consiste à refuser tous les offres. Vu que toutes les offres sont refusés, tous les vendeurs ont intérêt à ne pas faire passer de certificat et donc les croyances de l'acheteur sont confirmées. Par ailleurs la stratégie consistant à ne pas acheter face à une proportion 2/3 de biens de qualité 0 est optimale d'après la question précédente. On a donc bien un équilibre bayésien parfait mélangeant.

c) Supposons que le joueur 2 ait les croyances suivantes "tous les biens avec certificat sont de qualité 1 et tous ceux qui n'ont pas de certificat sont de qualité 0" et que sa stratégie consiste à accepter les offres avec certificat à un prix inférieur ou égal à 2. Un vendeur d'un bien de qualité 1 obtient, s'il fait passer un certificat et que l'offre est acceptée, un paiement de $p_1 - 1 - 1/2 = p_1 - 1.5$; s'il n'obtient pas de certificat (ou si l'offre est refusée) il obtient 0. Il a donc intérêt à obtenir le certificat et à proposer un prix $p_1 = 2$. Un vendeur d'un bien de qualité 0 obtient, s'il fait passer un certificat, au maximum $2 - 3 \leq -1$ (car $p_0 \leq 2$ pour que l'offre soit acceptée); il a donc intérêt à ne pas faire passer de certificat et à ne pas vendre l'objet. Les croyances du joueur sont donc à nouveau confirmées. Par ailleurs la stratégie décrite est une meilleure réponse à la stratégie du vendeur. Il s'agit donc d'un équilibre bayésien parfait séparant.