Feuille 1 : représentation d'interactions stratégiques, connaissance commune

Exercice 1 (∗) Il y a deux joueurs. A la période 1, le joueur 1 peut acheter ou non une action d'une entreprise. S'il ne l'achète pas, les deux joueurs ont un paiement (au sens d'utilité) de 0. S'il l'achète, avec probabilité 1/2 un des projets de l'entreprise réussit et avec probabilité 1/2 ce projet échoue. A la période 2, le joueur 1 apprend si le projet a réussi ou non. Il décide alors soit de conserver son action soit d'essayer de la vendre au joueur 2. Dans ce dernier cas, le joueur 2, qui ne sait pas si le projet a réussi ou non, accepte ou refuse d'acheter l'action. Si le joueur 1 décide de conserver son action, ou s'il essaie de la vendre mais que le joueur 2 refuse de l'acheter, le paiement du joueur 2 est de 0 et le paiement du joueur 1 est de 2 si le projet a réussi et de -3 si le projet a échoué. Si le joueur 1 vend son action au joueur 2 (et que le joueur 2 accepte de l'acheter), le paiement du joueur 1 est de -1 et le paiement du joueur 2 est de 4 si le projet a réussi et de -2 si le projet a échoué (on peut supposer que, pour des raisons non décrites, le joueur 2 est davantage capable de tirer partie de l'action de l'entreprise que le joueur 1).

Décrire cette situation par un jeu sous forme extensive. Combien les joueurs ont-ils de stratégies ? de stratégies réduites ? Mettre le jeu sous forme normale (sous forme d'une bimatrice).

Exercice 2 (TD) Représenter le jeu à deux joueurs Pierre-Papier-Ciseaux comme un jeu sous forme normale, puis comme un jeu sous forme extensive. Rappelons que le Papier bat la Pierre, qui bat les Ciseaux, qui battent le Papier. Si les deux joueurs jouent la même chose la partie est nulle, et les utilités sont de 0 pour chacun. Si un joueur bat l'autre, le gagnant a une utilité de 1, le perdant une utilité de -1.

Exercice 3 (TD) Représenter les variantes suivantes du jeu Pierre-Papier-Ciseaux ; dans chaque cas, dire combien les joueurs ont de stratégies.

a) Variante 1 : avant de jouer, le joueur 2 observe le coup du joueur 1.

b) Variante 2 : avant de jouer, avec probabilité 1/2, le joueur 2 observe le coup du joueur 1 ; avec probabilité 1/2, aucun joueur n'observe quoi que ce soit. Le joueur 1 ne sait pas si le joueur 2 observe son coup ou pas.

c) Variante 2 bis : avant de jouer, avec probabilité 1/2, le joueur 2 observe le coup du joueur 1 ; avec probabilité 1/2, aucun joueur n'observe quoi que ce soit. Le joueur 1 sait si le joueur 2 observe son coup ou pas.

d) Variante 3 : si le joueur 1 joue Pierre, alors le joueur 2 l'observe avec probabilité 1/2 avant de jouer. Si le joueur 1 joue Ciseaux ou Papier, aucun joueur n'observe quoi que ce soit (on peut supposer par exemple que quand le joueur 1 se prépare à jouer Pierre, il a une fois sur deux un tic nerveux qui révèle à l'autre qu'il va jouer Pierre). Le joueur 1 ne sait pas si le joueur 2 observe son coup ou pas.

Exercice 4 Soit n un entier naturel. On considère le jeu à 2 joueurs suivant. On dispose d'un tas de n allumettes. Le joueur 1 prend ou une deux allumettes, puis tant qu'il y a des allumettes, le joueur 2 prend une ou deux allumettes, et ainsi de suite alternativement jusqu'à ce qu'il n'y ait plus d'allumettes. Le joueur qui prend la dernière allumette a perdu. Il a une utilité de -1, et l'autre joueur a une utilité de 1. Pour $n = 2$, $n = 3$ et $n = 4$, représenter ce jeu et dire combien chaque joueur a de stratégies.

Exercice 5 (TD) *Connaissance partagée et connaissance commune (les cocus de Bagdad).*

Une proposition A est connaissance partagée d'un ensemble d'agents (ou connaissance partagée de niveau 1) si tous les agents savent que A est vraie. La proposition est connaissance partagée de niveau 2 si elle est connaissance partagée et que tous les agents le savent. Plus généralement, elle est connaissance partagée de niveau $k+1$ si elle est connaissance partagée de niveau k et que tous les agents le savent. Enfin, la proposition est connaissance commune si elle connaissance partagée de niveau k pour tout entier $k \geq 1$. La proposition A est donc connaissance commune si tous les agents savent A, tous les agents savent que tous les agents savent A, tous les agents savent que tous les agents savent que tous les agents savent A, et ainsi de suite, à l'infini. Le but de l'exercice est de mieux comprendre la différence entre connaissance partagée et connaissance commune.

Voici l'énoncé : dans un village, il y a n couples hétérosexuels et personne d'autre. Les coutumes sont les suivantes : si le jour j une femme acquiert la certitude que son mari a une liaison avec une autre femme, la nuit entre le jour j et le jour $j+1$, elle coupe la tête de son mari et la plante sur un pieu devant sa maison, de manière à ce que tout le monde la voit pendant le jour $j+1$. Les hommes prennent donc bien garde à ce que leur femme ne soient pas au courant de leurs éventuelles liaisons. En revanche, ils ne les cachent pas aux autres femmes du village. Le résultat est que chaque femme sait si les hommes autres que son mari sont fidèles, mais aucune femme ne sait si son mari l'est. De plus, les femmes raisonnent parfaitement, et toute cette description est connaissance commune.

On suppose qu'il y a 100 hommes infidèles. Chaque femme sait donc qu'il y a au moins 99 hommes infidèles. Pourtant, le village vit paisiblement. Arrive un explorateur dont il est connaissance commune qu'il dit toujours la vérité. Le 21 juin, l'explorateur rassemble tous les habitants sur la place du village et déclare : dans ce village, il y a au moins un homme infidèle. Le lendemain matin, rien ne se passe. Le surlendemain non plus, et tout semble normal jusqu'au matin du 29 septembre. Ce matin, les 100 têtes des hommes infidèles sont retrouvées devant leur maison, détachées de leur corps et plantées sur un pieu. Que s'est-il passé ? En particulier, puisque l'explorateur a dit quelque chose que tout le monde savait, pourquoi sa déclaration a-t-elle changé la situation ?

1) Supposons qu'il y ait $k \geq 1$ hommes infidèles. Si vous êtes une femme dont le mari est infidèle, que savez-vous précisément du nombre d'hommes infidèles ? Même question si votre mari est fidèle.

2) Dans le cas $k=1$, que va-t-il se passer ? Dans le cas $k=2$, que va-t-il se passer le 22 juin ? le 23 juin ?

3) Dans le cas $k=3$, que va-t-il se passer le 22 juin ? le 23 juin ? le 24 juin ? Généraliser au cas k quelconque.

4) Revenons au problème initial. Puisque toutes les femmes savaient déjà qu'au moins un homme était infidèle, qu'a changé la déclaration de l'explorateur ?

Exercice 6 L'entreprise des frères L. peut investir de manière risquée ou non risquée. Si elle choisit un investissement non risqué, elle obtient un gain modéré à coup sûr. Si elle choisit un investissement risqué, elle fait un gain important avec probabilité 1/2, une perte modérée avec probabilité 1/3 et fait faillite avec probabilité 1/6. En cas de faillite, l'Etat peut soit décider de sauver l'entreprise, soit de ne pas intervenir. L'entreprise et l'Etat préfèrent tous les deux, par ordre décroissant, les issues suivantes : a) gain important, b) gain modéré, c) perte modérée, d) faillite et secours de l'Etat, e) faillite et absence d'intervention de l'Etat. Si l'entreprise est sûre qu'en cas de faillite, l'Etat la sauvera, elle préfère faire un investissement risqué. Si elle est sûre que l'Etat n'interviendra pas, elle préfère l'investissement non risqué.

a) Donner un exemple de jeu sous forme extensive compatible avec cette description.

b) Supposons que l'Etat doive régulièrement jouer à de tels jeux avec des entreprises différentes. Pourquoi cela pourrait-il pousser l'Etat à ne pas intervenir en cas de faillite ? (on demande juste une intuition).

Exercice 7 Le jeu du "morpion n-n avec remplissage jusqu'au bout" se décrit ainsi : il y a deux joueurs. On dispose d'une tableau de n cases sur n. Le premier joueur met une croix dans l'une des cases, puis le joueur 2 met un rond dans l'une des cases restées vides, puis le joueur 1 met une croix dans l'une des cases restées vides, et ainsi de suite, alternativement, JUSQU'A CE QUE LES NEUFS CASES SOIENT REMPLIES. Si à la fin de la partie, aucun des joueurs n'est parvenu à aligner trois de ses symboles, la partie est nulle et les deux joueurs ont une utilité de 0. Sinon, le premier joueur qui a réussi a aligner (sur une ligne, une colonne, ou une diagonale) trois de ses symboles a gagné : il a une utilité de 1 et l'autre a une utilité de -1.

Combien y-a-t-il de déroulement de parties possibles ? Combien chaque joueur a-t-il de stratégies ? On pourra commencer par examiner le cas $n=2$.

Exercice 8 $(*)$ *Problème des trois portes (ou problème de Monty-Hall)*

Ce problème est adapté du jeu télévisé américain "Let's make a deal". Il y a deux agents : un présentateur et un candidat. Le candidat est placé devant trois portes fermées, notées A, B et C. Derrière l'une d'elles se trouve une voiture et derrière chacune des deux autres se trouve une chèvre. La porte derrière laquelle se trouve la voiture a été choisie de manière équiprobable. Le candidat doit désigner une porte. Puis le présentateur ouvre une porte qui n'est ni celle choisie par le candidat, ni celle cachant la voiture (le présentateur sait où se trouve la voiture). Le candidat a alors le droit ou bien d'ouvrir la porte qu'il a choisie initialement, ou bien d'ouvrir la troisième porte. Il gagne le lot qui se trouve derrière la porte qu'il ouvre.

Les questions qui se posent sont notamment : que doit faire le candidat (changer de porte ou conserver la même) ? Cela dépend-il de son choix initial ? de la porte qui a été ouverte par l'animateur ? de la stratégie de l'animateur ? Quelles sont les chances du candidat de gagner la voiture en agissant au mieux ?

Comme la forme extensive du jeu présenté ci-dessus serait un peu longue a écrire, nous allons considérer la variante suivant, où au début on assigne d'office la porte A au candidat : tout d'abord, la porte derrière laquelle se trouve la voiture est tirée au sort de manière équiprobable. Puis l'animateur, ouvre une porte qui n'est ni la porte A ni celle derrière laquelle se trouve la voiture (si la voiture est derrière la porte A, l'animateur a le choix entre ouvrir la porte B et la porte C; il choisit alors comme il veut, pas forcément en tirant au hasard de manière équiprobable). Le candidat a alors le choix entre ouvrir la porte A et ouvrir l'autre porte encore fermée. Il gagne ce qui se trouve derrière la porte qu'il ouvre.

Les utilités sont : 1 pour le candidat et 0 pour l'animateur si le candidat gagne la voiture, 0 pour le candidat et x pour l'animateur si le candidat gagne la chèvre. En particulier, l'utilité espérée du candidat est égale a sa probabilité de gagner la voiture.

1) L'hypothèse selon laquelle la porte derrière laquelle se trouve la voiture est tirée au sort de façon équiprobable est-elle importante ? Pourquoi ?

2) A votre avis, est-il préférable de conserver la porte A ou de changer de porte ? Est-ce qu'il n'y a aucune différence ? Est-ce que cela dépend (et alors de quoi) ?

3) Ecrire la forme extensive de ce jeu. Combien le candidat a-t-il de stratégies ? Combien l'animateur a-t-il de stratégies ? Mettre le jeu sous forme normale.

4) Combien le candidat aurait-il eu de stratégies dans la version complète du jeu (celle où il choisit au départ une porte parmi A, B et C) ? Dans toute la suite on ne considère que la version simplifiée.

5) Montrer que la probabilité de gagner la voiture en changeant systématiquement de porte et la probabilité de gagner la voiture en ne changeant jamais de porte ne dépendent pas de la stratégie de l'animateur. Calculer ces probabilités.

6) Montrer que le candidat a une stratégie qui est meilleure réponse à toute stratégie de l'animateur. Quelle est cette stratégie ?

7) On considère maintenant la stratégie suivante du candidat : conserver la porte A si l'animateur ouvre la porte B ; choisir la porte B si l'animateur ouvre la porte C. Montrer que la probabilité de gagner la voiture avec cette stratégie dépend de la stratégie de l'animateur.

8) On suppose que l'animateur a la stratégie suivante : ouvrir la porte B si la voiture est derrière la porte A ou la porte C, et n'ouvrir la porte C que si la voiture est derrière la porte B. On suppose que le candidat le sait. Montrer que si l'animateur ouvre la porte C alors le candidat gagne systématiquement en changeant de porte, et que si l'animateur ouvre la porte B, le candidat est indifférent entre changer de porte et conserver la porte A.

8) Consulter la page http://fr.wikipedia.org/wiki/Problème_de_Monty_Hall, et remarquer la phrase "Ce problème a longtemps été un cas de paradoxe probabiliste (...) pour lequel il existe deux solutions contradictoires défendables sans qu'on parvienne à faire triompher une interprétation. La solution 2/3-1/3 s'impose, en particulier après la réalisation de simulations d'un grand nombre de tirages."

S'étonner du fait que des gens ont eu besoin qu'on fasse des simulations pour accepter la solution du problème. Se dire que le simple fait de savoir représenter les interactions stratégiques proprement, ça aide !

Feuille 2 : stratégies mixtes, jeux à somme nulle

Exercice 9 (stratégies mixtes) $(*)$ On considère le jeu suivant :

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} G & D \end{array} \\ \begin{array}{c} H \\ B \end{array} & \begin{pmatrix} 0,0 & 3,5 \\ 4,2 & 2,1 \end{pmatrix} \end{array}$$

1) que valent $u_1(H,D)$ et $u_2(H,D)$?

2) Pour $\sigma_2 = (1/2, 1/2)$ et $\sigma_1 = (1/3, 2/3)$, que valent les paiements suivants : a) $u_1(H,\sigma_2)$, $u_2(H,\sigma_2)$, $u_1(B,\sigma_2)$ et $u_2(B,\sigma_2)$? b) $u_1(\sigma_1,G)$ et $u_2(\sigma_1,D)$? c) $u_1(\sigma_1,\sigma_2)$ et $u_2(\sigma_1,\sigma_2)$?

3) Peut-on trouver des valeurs de x et de y dans $[0,1]$ tels que pour $\sigma_1 = (x, 1-x)$ et $\sigma_2 = (y, 1-y)$, on ait $u_1(H,\sigma_2) = u_1(B,\sigma_2)$ et $u_2(\sigma_1,G) = u_2(\sigma_1,D)$? Si oui, les déterminer.

Exercice 10 (stratégies mixtes) Mêmes questions pour le jeu suivant :

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} G & D \end{array} \\ \begin{array}{c} H \\ B \end{array} & \begin{pmatrix} 4,2 & 2,3 \\ 6,-1 & 0,0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Exercice 11 $(*)$ (stratégies mixtes) On considère le jeu suivant :

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} G & M & D \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} & \begin{pmatrix} 0,1 & -1,2 & 1,-2 \\ 1,-1 & 0,0 & -1,2 \\ -1,3 & 1,2 & 0,0 \end{pmatrix} \end{array}$$

1) Pour $\sigma_2 = (1/3, 1/3, 1/3)$ et $\sigma_1 = (3/4, 1/4, 0)$, que valent les paiements $u_1(A,\sigma_2)$ et $u_2(A,\sigma_2)$? $u_1(\sigma_1,G)$ et $u_2(\sigma_1,D)$? $u_1(\sigma_1,\sigma_2)$ et $u_2(\sigma_1,\sigma_2)$?

2) Peut-on trouver des stratégies mixtes σ_1 et σ_2 telles que $u_1(A,\sigma_2) = u_1(B,\sigma_2) = u_1(C,\sigma_2)$ et $u_2(\sigma_1,G) = u_2(\sigma_1,M) = u_2(\sigma_1,D)$? Si oui, les déterminer.

Exercice 12 (stratégies mixtes avec un continuum de stratégies) (Guerre d'usure) (TD)

Deux joueurs se disputent une ressource de valeur V. Pour qu'un joueur bénéficie de la ressource, il faut que l'autre s'en aille. Attendre a un coût de 1 par unité de temps. Les stratégies des joueurs consistent à choisir l'instant $t \in \mathbb{R}_+$ auquel ils s'en vont si l'autre joueur n'est toujours pas parti à ce moment là. Si le joueur i choisit t_i et le joueur j choisit t_j les paiements du joueur i sont : $V - t_j$ si $t_i > t_j$, $V/2 - t_j$ si $t_i = t_j$, et $-t_i$ si $t_i < t_j$.

1) Les règles du jeu stipulent qu'un joueur a le droit de choisir un temps de départ $t > V$. Un tel choix vous paraît-il stupide ? Pourquoi ?

2) Jouer à ce jeu avec votre voisin (on prendra $V = 100$ et chacun écrira un réel positif sur un bout de papier, qui correspond à sa stratégie, puis vous comparerez vos stratégies et calculerez les paiements). Quelle est la somme de vos gains respectifs ?

3) Vous êtes le joueur 1. Vous savez que le joueur 2 joue $t = 100$ avec probabilité 1/2 et $t = 50$ avec probabilité 1/2. Supposons pour cette question seulement que vous êtes obligés de choisir un temps de départ entier. Que jouez-vous ? Pourquoi ? Cela modifie-t-il votre point de vue sur la question 1) ?

4) Montrer qu'il existe une stratégie mixte σ_2 du joueur 2 décrite par une densité de probabilité continue telle que, contre σ_2, le joueur 1 est indifférent entre toutes ses stratégies.

Exercice 13 (Jeux à somme nulle : un poker simplifié) (TD) Deux joueurs jouent un jeu à somme nulle. La mise est de 1 euro par joueur pour commencer le jeu. Un jeu de 32 cartes est battu, puis le joueur 1 tire 1 carte et la regarde. Le joueur 2 ne voit pas la carte. Le joueur 1 décide alors soit de se coucher (abandon, et il donne alors sa mise au joueur 2), soit de doubler sa mise. Au cas où le joueur 1 a doublé la mise, le joueur 2 décide alors soit de se coucher (le joueur 1 gagne alors l'euro de mise initiale du joueur 2), soit de doubler sa mise également. Dans ce dernier cas, le joueur 1 dévoile la carte tirée : si elle est Rouge, le joueur 1 ramasse toutes les mises (donc a gagné 2 euros) ; si elle est noire , le joueur 2 ramasse les mises (donc a gagné 2 euros). Les utilités sont égales aux gains monétaires espérés.

1) Pourquoi pour l'analyse de ce jeu peut-on supposer qu'au lieu de 32 cartes (16 rouges et 16 noires), le jeu comporte 2 cartes, 1 rouge et 1 noire [on demande juste une intuition, pas un argument formel] ? Dans la suite, on considère cette variante avec seulement 2 cartes.

2) Mettre le jeu (avec 2 cartes) sous forme extensive, puis sous forme normale. Quelle est la valeur du jeu (la somme équitable que doit payer le joueur 1 au joueur 2 pour jouer un tour) ? Quelles sont les stratégies optimales des joueurs ?

Exercice 14 (TD) (Valeurs de jeux matriciels) Calculer les valeurs des jeux à somme nulle représentés par les matrices suivantes.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 0 \\ -2 & 4 \\ 7 & -2 \end{pmatrix}$$

Exercice 15 (un duel)
a) Duel au pistolet bruyant à une balle

Deux personnes se battent en duel. Les duellistes ont chacun une balle dans leur pistolet. Ils marchent l'un vers l'autre à une vitesse constante et, en partant au coup de sifflet à $t = 0$, ils devraient se rencontrer à $t = 1$. Si le joueur i tire sur j à l'instant t, il le touche avec une probabilité $p_i(t)$; $p_i(t)$ est supposé strictement croissante, continue, et telle que $p_i(0) = 0$, $p_i(1) = 1$. Le paiement du joueur i est 1 s'il touche son adversaire avant d'être touché, -1 dans le cas symétrique et 0 si aucun n'est touché ou s'ils sont touchés au même instant.

Si l'autre a déjà tiré (et n'a donc plus de balles), le mieux est d'attendre $t = 1$ pour tirer, afin d'être sûr de faire mouche. On ne s'intéressera donc qu'à des stratégies du type "tirer à l'instant $t = a_i$ si l'autre n'a pas tiré avant a_i, tirer à l'instant $t = 1$ sinon", où $a_i \in [0, 1]$.

1) Représenter cette situation comme un jeu sous forme normale à somme nulle. Déterminer les fonctions de paiements.

2) Montrer que ce jeu a une valeur et que la stratégie optimale des deux joueurs est de tirer à t^* défini par $p_1(t^*) + p_2(t^*) = 1$.

b) Duel au silencieux, à une balle.

La situation est identique sauf que les duellistes, munis de silencieux, ne peuvent pas savoir si leur adversaire a déjà tiré (si bien qu'une stratégie du type "tirer à l'instant $t = a_i$ si l'autre n'a pas tiré avant, tirer à l'instant $t = 1$ sinon" n'est plus réalisable). Représenter cette situation par un jeu sous forme normale. Montrer que ce jeu n'a pas de valeur (en stratégies pures).

On pourra montrer tout d'abord que s'il y a un équilibre (en stratégie pures), alors dans cet équilibre, les deux joueurs tirent au même moment, puis montrer qu'il n'y a aucun équilibre (en stratégies pures).

Exercice 16 (retard à l'école maternelle) ($*$)

A l'école maternelle "Les p'tits dauphins", la règle est que les parents doivent venir chercher leurs enfants au plus tard à 17h. Pourtant, des parents arrivent parfois en retard, si bien que le personnel doit les attendre. Afin d'en finir avec ces retards, ou du moins de les rendre moins fréquents, la direction décide d'inciter les parents à arriver à l'heure en faisant payer une amende aux retardataires : 1 euros aux parents qui ont entre dix et vingt minutes de retard, 2 euros à ceux qui ont entre vingt et trente minutes de retard, 3 euros à ceux qui ont entre 30 et 40 minutes de retard, etc. Il s'agit dans les grandes lignes d'une histoire vraie.

1) A votre avis, comment cette règle a-t-elle fait évoluer le comportement des parents ? Expliquer.

2) Quelques mois plus tard, la direction décide de supprimer le système d'amendes. A votre avis, comment cela a-t-il fait évoluer le comportement des parents ? Expliquer.

Feuille 3 : dominance

Exercice 17 ($*$) Une assemblée composée de 99 membres doit voter à la majorité pour choisir entre deux projets: a et b. Chaque membre $i \in \{1, ..., 99\}$ est doté d'une fonction d'utilité $u^i : \{a, b\} \mapsto \{0, 1\}$ supposée bijective. Pour voter, chacun écrit a ou b sur un bulletin secret. Le projet remportant la majorité des suffrages est adopté.

1) Ecrire le jeu sous forme stratégique associé et montrer que voter pour le projet que l'on préfère est une stratégie dominante.

2) Il y a maintenant 3 votants et 3 projets a, b, c. Pour voter, chacun écrit a, b ou c sur un bulletin secret. Le projet remportant la majorité des suffrages est adopté (si chaque projet reçoit un vote, aucun projet n'est realisé et l'utilité de chacun vaut 0). On note A (respectivement B, C) l'issue "le projet a (respectivement b, c) est adopté." On suppose que l'utilité d'un votant ne dépend que du projet adopté, et qu'on a $u_1(A) = u_2(B) = u_3(C) = 2$, $u_1(B) = u_2(C) = u_3(B) = 1$, $u_1(C) = u_2(A) = u_3(A) = 0$ (le fait que $u_1(A) = 2$ signifie que pour tout profil de stratégies tel que A est adopté, par exemple (a, a, b) ou (a, c, a), l'utilité du votant 1 est de 2).

a) Les joueurs ont-ils des stratégies dominantes ?

b) On suppose maintenant que les joueurs votent séquentiellement : le joueur 1 vote, puis le joueur 2 vote (connaissant le vote du joueur 1), puis le joueur 3 vote (connaissant les votes des deux autres joueurs). Les joueurs sont rationnels et ceci est connaissance commune. A votre avis, quel candidat sera élu ? Pourquoi ?

Exercice 18 ($*$) Considérons le jeu suivant, où x est un réel :

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} g & d \end{array} \\ \begin{array}{c} H \\ B \end{array} & \begin{pmatrix} 10^6, 1 & -10^6, 0 \\ x, 1 & x, 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Supposons que vous soyez le joueur 1. Pour quelles valeurs de x joueriez-vous B ? Pour $x < 10^6$, quelle est l'unique issue restante après l'élimination itérée des stratégies strictement dominées ? Expliquer l'éventuel écart entre vos réponses à ces questions en faisant référence à la connaissance commune de la rationalité ou à la possibilité d'erreurs.

Exercice 19 (TD) (Enchères au second prix sous plis scellés avec valeurs privées)

Un bien est mis aux enchères. Il y a n acheteurs potentiels numérotés de 1 à n. La procédure d'enchères est la suivante: chaque acheteur soumet une offre écrite sous pli scellé. Tous les plis sont transmis à un commissaire priseur. L'acheteur ayant soumis l'offre la plus haute emporte le bien et paye un prix égal à la seconde plus haute offre (en cas de gagnants ex-aequo, le joueur de plus petit numéro parmi les gagnants achète l'objet au prix le plus haut).

Chaque acheteur i a une valuation v_i dans $\mathbb{R}_+$, qui représente la somme à laquelle il évalue le bien. S'il achète le bien au prix p, son utilité est $v_i - p$. S'il ne l'achète pas, son utilité est nulle.

Modéliser cette situation par un jeu sous forme stratégique. Montrer qu'offrir sa propre valuation est une stratégie dominante.

Exercice 20 (TD) (Enchères au second prix sous plis scellés avec valeur publique et signaux privés)

Même système d'enchères, mais maintenant chaque acheteur potentiel i n'est pas sûr de la valeur que le bien a pour lui. Il dispose uniquement d'un *signal* v_i dans $\mathbb{R}^+$. La vraie valeur du bien est commune à tous les joueurs et égale à $v = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} v_i$. Si le joueur i achète le bien au prix p, son utilité est $v - p$. S'il ne l'achète pas, son utilité est nulle. Les joueurs ne connaissent pas les signaux des autres. Pour fixer les idées, on suppose que les v_i sont tirés uniformément et indépendamment dans $[0, 1]$.

1) Modéliser cette situation par un jeu sous forme stratégique. Montrer qu'offrir son signal n'est PAS une stratégie dominante (on pourra se contenter d'étudier le cas $n = 2$).

2) Expliquer pourquoi, si les joueurs offrent tous leur signal et qu'il y a au moins 3 joueurs, le joueur qui remporte l'enchère risque d'être victime de la "malédiction du vainqueur" (terme consacré pour désigner une situation où, ex-post, c'est à dire une fois la vraie valeur du bien connue, celui qui a remporté l'enchère préfèrerait ne pas l'avoir remporter car il a payé trop cher).

Exercice 21 ($*$) Considérons le jeu suivant, où le joueur 1 n'a qu'une stratégie :

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} g & d \end{array} \\ H & \begin{pmatrix} 10,1 & -2,0 \end{pmatrix} \end{array}$$

1) Montrer que l'élimination des stratégies strictement dominées mène à un jeu avec une unique issue.

2) En ajoutant au joueur 1 une stratégie strictement dominante, est-il possible d'obtenir un jeu dans l'élimination itérée des stratégies strictement dominées mène à une unique issue qui est pire pour le joueur 1 ? Expliquer pourquoi dans un tel jeu le joueur 1 aimerait pouvoir s'engager à ne pas jouer sa stratégie strictement dominante.

Exercice 22 Montrer que dans un jeu fini, chaque joueur a au moins une stratégie qui n'est pas faiblement dominée. Montrer qu'en revanche, si un joueur a un nombre infini de stratégies, il se peut que toutes ses stratégies soient strictement dominées.

Exercice 23 ($*$) Considérons le jeu suivant :

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} g & c & d \end{array} \\ \begin{array}{c} H \\ M \\ B \end{array} & \begin{pmatrix} 1,0 & 3,1 & 1,1 \\ 1,1 & 3,0 & 0,1 \\ 2,2 & 3,3 & 0,2 \end{pmatrix} \end{array}$$

(a) Identifier toutes les paires de stratégies telles que l'une domine faiblement l'autre.

(b) Choisir une stratégie faiblement dominée, l'éliminer afin d'obtenir un jeu réduit, puis répéter ce processus jusqu'à ce qu'il n'y ait plus de stratégies faiblement dominées (attention : deux stratégies ayant les mêmes paiements ne se dominent pas faiblement). Montrer qu'on peut aboutir ainsi à un jeu avec (H, d) comme unique profil de stratégies mais aussi à un jeu avec (B, c) comme unique profil de stratégies.

(c) Quels sont les équilibres de Nash en stratégies pures du jeu de départ ? Montrer que l'élimination itérée des stratégies faiblement dominées peut éliminer des équilibres de Nash.

Exercice 24 (TD) On considère un groupe de n étudiants préparant un concours (n est un entier strictement positif fixé). Chaque étudiant i dans $\{1, ..., n\}$ doit choisir un nombre d'heures $h_i \in \mathbb{R}_+$ qu'il consacre à préparer le concours. Ces choix sont supposés simultanés.

La désutilité de l'étudiant i dûe à son effort est alors $\frac{1}{2}{h_i}^2$. Le bénéfice, qu'il retire de son résultat comparé aux autres, est $h_i - \bar{h}$, où $\bar{h} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} h_j$. En bref, l'utilité de l'étudiant i est donc donnée par: $h_i - \bar{h} - \frac{1}{2}{h_i}^2$.

1) Modéliser cette situation par un jeu sous forme stratégique.

2) Montrer que chaque joueur a une stratégie dominante.

3) Déterminer le ou les équilibres de Nash du jeu (on ne considèrera que des stratégies pures), et les paiements associés.

Exercice 25 Considérons le jeu à trois joueurs sous forme stratégique suivant. Chaque joueur a 2 stratégies pures : le joueur 1 a les stratégies H et B (la ligne du haut ou la ligne du bas), le joueur 2 a les stratégies g et d (la colonne de gauche ou de droite), et le joueur 3 a les stratégies G et D (la matrice de gauche ou la matrice de droite).

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} g & d \end{array} \\ \begin{array}{c} H \\ B \end{array} & \begin{pmatrix} 3,4,4 & 1,3,3 \\ 8,1,4 & 2,0,6 \end{pmatrix} \\ & G \end{array} \qquad \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} g & d \end{array} \\ \begin{array}{c} H \\ B \end{array} & \begin{pmatrix} 4,0,5 & 0,1,6 \\ 5,1,3 & 1,2,5 \end{pmatrix} \\ & D \end{array}$$

a) Donner toutes les paires de stratégies telles que l'une domine l'autre, strictement ou faiblement [Attention : bien comprendre ce que cela signifie dans un jeu à plus de deux joueurs]

(b) Eliminer itérativement les stratégies strictement dominées. Quels sont les équilibres de Nash ?

Exercice 26 Dans le jeu de Pierre-Papier-Ciseaux-Puits, la pierre bat les ciseaux qui battent le papier qui bat la pierre, et de plus le puits bat la pierre et les ciseaux, mais est battu par le papier. A votre avis, y-a-t-il des stratégies meilleures que d'autres ? Des stratégies à éviter ? En quel sens ?

Feuille 4 : équilibres de Nash

Exercice 27 ($*$) Calculer les équilibres de Nash (en stratégies pures) du jeu à trois joueurs suivant (le joueur 1 choisit la ligne, le joueur 2 la colonne, le joueur 3 la matrice, la 1ère composante donne le paiement du joueur 1, la 2nde celui du joueur 2, la 3ème celui du joueur 3).

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} G & D \end{array} \\ \begin{array}{c} H \\ B \end{array} & \begin{pmatrix} (0,0,0) & (0,1,-1) \\ (2,2,2) & (-1,3,4) \end{pmatrix} \\ & O \end{array} \qquad \begin{array}{c} \begin{array}{cc} G & D \end{array} \\ \begin{pmatrix} (8,4,2) & (7,7,-2) \\ (9,2,5) & (-10,1,0) \end{pmatrix} \\ E \end{array}$$

Exercice 28 Même question que dans l'exercice précédent, mais pour le jeu suivant :

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} G & D \end{array} \\ \begin{array}{c} H \\ B \end{array} & \begin{pmatrix} (-1,0,-1) & (1,1,1) \\ (2,0,3) & (5,-1,4) \end{pmatrix} \\ & O \end{array} \qquad \begin{array}{c} \begin{array}{cc} G & D \end{array} \\ \begin{pmatrix} (-6,4,-1) & (1,2,3) \\ (-8,0,2) & (0,0,0) \end{pmatrix} \\ E \end{array}$$

Exercice 29 ($*$) Soit un jeu fini $G = \{I, (S_i)_{i\in I}, (u_i)_{i\in I}\}$. Pour chaque $i \in I$, soit $a_i \in I\!R_+^*$ et $f_i : S_{-i} \to I\!R$ ($S_{-i} = \times_{j\in I\setminus\{i\}} S_j$ est l'ensemble des profils de stratégies des joueurs autres que i). Soit le jeu $G' = \{I, (S_i)_{i\in I}, (u'_i)_{i\in I}\}$, où pour tout $s \in S = \times_{i\in I} S_i$, $u'_i(s) = a_i u_i(s) + f_i(s_{-i})$. Le jeu G' est donc obtenu à partir du jeu G en rajoutant aux paiements des joueurs un paiement qui ne dépend que de ce que font les autres joueurs.

1) Soit $\sigma \in \times_{i\in I}\Delta(S_i)$, $i \in I$, et $\tau_i \in \Delta(S_i)$. Montrer que $u'_i(\sigma) - u'_i(\tau_i, \sigma_{-i}) = a_i[u_i(\sigma) - u_i(\tau_i, \sigma_{-i})]$.

2) En déduire que G et G' ont les mêmes équilibres mixtes.

3) Montrez que tous les jeux suivants ont les mêmes équilibres mixtes :

$$a)\begin{pmatrix} 1,1 & 0,0 \\ 0,0 & 3,3 \end{pmatrix} \quad b)\begin{pmatrix} 2,2 & 0,0 \\ 0,0 & 6,6 \end{pmatrix} \quad c)\begin{pmatrix} 3,1 & 0,0 \\ 0,0 & 9,3 \end{pmatrix} \quad d)\begin{pmatrix} 101,101 & 0,100 \\ 100,0 & 3,3 \end{pmatrix} \quad e)\begin{pmatrix} 102,1 & 0,0 \\ 100,0 & 6,3 \end{pmatrix}$$

4) On suppose qu'avant de jouer, les joueurs peuvent discuter, et éventuellement se mettre d'accord sur ce qu'ils vont jouer (mais l'accord n'est pas contraignant : au moment de jouer, ils sont libres de respecter ou de ne pas respecter l'accord). Que pensez-vous qu'ils joueront dans le jeu a) ? dans le jeu d) ?

Exercice 30 ($*$) Calculer les équilibres de Nash en stratégies mixtes des jeux suivants.

$$a)\begin{pmatrix} 1,2 & 0,0 \\ 0,0 & 2,1 \end{pmatrix} \quad b)\begin{pmatrix} 6,6 & 2,7 \\ 7,2 & 0,0 \end{pmatrix} \quad c)\begin{pmatrix} 2,-2 & -1,1 \\ -3,3 & 4,-4 \end{pmatrix} \quad d)\begin{pmatrix} 1,1 & 0,0 \\ 0,0 & 0,0 \end{pmatrix} \quad e)\begin{pmatrix} 1,1 & 0,0 \\ 0,0 & 0,0 \end{pmatrix}$$

Exercice 31 (TD) Calculer dans chaque cas les équilibres de Nash du jeu $G = (I, (S_i)_{i\in I}, (u_i)_{i\in I})$, où $I = \{1,2\}$, $S_1 = S_2 = [0,1]$, et, x représentant la stratégie du joueur 1 et y celle du joueur 2 :

a) $u_1(x,y) = 5xy - x - y + 2$; $u_2(x,y) = 5xy - 3x - 3y + 5$.

b) $u_1(x,y) = -(x-y)^2$; $u_2(x,y) = (x+y-1)^2$.

c) $u_1(x,y) = -(x-y)^2$; $u_2(x,y) = (x-y)^2$.

Exercice 32 Un groupe de n pêcheurs exploite un lac contenant une quantité de poisson considérée comme infinie. Si chaque pêcheur i prend une quantité $x_i \geq 0$, le prix unitaire du poisson s'établit à $p = \max(1 - \sum_{i=1}^n x_i, 0)$. Chaque pêcheur vend toute sa production au prix p et cherche à maximiser son revenu (le coût de production est supposé nul).

1- Ecrire le revenu du pêcheur i en fonction de $(x_1, ..., x_n)$.

2- Calculer la correspondance de meilleure réponse, les équilibres de Nash et le revenu total à chaque équilibre.

3- Etudier le cas du monopole ($n = 1$) et comparer.

Exercice 33 (TD) Dans les jeux suivants, déterminer les stratégies itérativement strictement dominées (par des stratégies mixtes), puis calculer les équilibres de Nash en stratégies mixtes.

$$a)\quad \begin{array}{c} \\ H \\ M \\ B \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} g & c & d \end{array} \\ \begin{pmatrix} 4,2 & 2,3 & -2,-1 \\ 6,-1 & 0,0 & 5,-3 \\ -1,5 & -1,0 & 10,-1 \end{pmatrix} \end{array} \qquad b)\quad \begin{array}{c} \\ H \\ M \\ B \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} g & c & d \end{array} \\ \begin{pmatrix} (1,1) & (0,0) & (8,0) \\ (0,0) & (3,3) & (0,0) \\ (0,8) & (0,0) & (6,6) \end{pmatrix} \end{array}$$

Exercice 34 Déterminer les équilibres de Nash mixtes du jeu à trois joueurs suivant

$$\begin{array}{c} \\ H \\ B \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} G & D \end{array} \\ \begin{pmatrix} (1,1,-1) & (0,0,0) \\ (0,0,0) & (0,0,0) \end{pmatrix} \\ O \end{array} \qquad \begin{array}{c} \begin{array}{cc} G & D \end{array} \\ \begin{pmatrix} (0,0,0) & (0,0,0) \\ (0,0,0) & (1,1,-1) \end{pmatrix} \\ E \end{array}$$

Exercice 35 (un jeu de marchandage)

On note : $T = \{(x,y) \in I\!R^2, x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq 1\}$. Deux joueurs doivent se mettre d'accord sur un point de T, sachant que l'abscisse correspond au paiement du joueur 1, l'ordonnée correspond au paiement du joueur 2, et qu'en cas de désaccord le paiement de chaque joueur sera nul.

Plus précisément, on considère l'interaction suivante. Simultanément, le joueur 1 choisit un réel x et le joueur 2 choisit un réel y (x et y peuvent être n'importe quels réels). Si $(x,y) \in T$, alors le paiement du joueur 1 est x et celui du joueur 2 est y. Si $(x,y) \notin T$, alors le paiement de chaque joueur est nul. (Ces règles sont connues des deux joueurs.)

1) Modéliser ceci par un jeu sous forme stratégique $G = (I, (S_i)_{i\in I}, (u_i)_{i\in I})$.

2) Soit (x,y) dans T tels que $x+y=1$. Montrer que (x,y) est un paiement d'équilibre de Nash de G.

3) Déterminer tous les paiements d'équilibre de Nash de G.

Exercice 36 Soit $G = (I, (S_i)_{i\in I}, (u_i)_{i\in I})$ un jeu à deux joueurs symétrique, c'est-à-dire tel que: $I = \{1,2\}$, $S_1 = S_2$ noté X, et $\forall (x_1,x_2) \in X \times X$, $u_1(x_1,x_2) = u_2(x_2,x_1)$.

On suppose que X est un convexe compact de $I\!R^n$, que u_1 est continue et que pour tout x_2 dans X, l'application qui à x_1 associe $u_1(x_1,x_2)$ est quasiconcave.

Montrer qu'il existe un équilibre symétrique, i.e. qu'il existe un élément x^* de X tel que (x^*,x^*) soit un équilibre de Nash de G. (On pourra poser $D = \{(x_1,x_2) \in X \times X, x_1 = x_2\}$ et appliquer le théorème de Kakutani à une correspondance bien choisie de D dans D).

Exercice 37 $(*)$ (l'argument des jumeaux) L'argument suivant est parfois avancé pour dire que, dans le dilemme du prisonnier (ci-dessous), les deux joueurs devraient jouer C :

$$\begin{array}{c} \\ C \\ D \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} C & D \end{array} \\ \begin{pmatrix} 3,3 & 4,-2 \\ -2,4 & -1,-1 \end{pmatrix} \end{array}$$

“Les deux joueurs se trouvent exactement dans la même situation, ils vont donc jouer la même chose. Si je suis un des joueurs, je sais donc que l'autre va jouer la même chose que moi, et que donc globalement nous allons jouer soit (C,C), soit (D,D) ; comme (C,C) donne un meilleur paiement que (D,D), il vaut mieux que je joue C.”

Qu'en pensez-vous ?

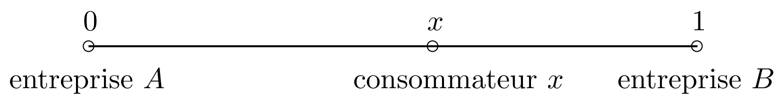
Exercice 38 *(TD, rapidement)* Dans le jeu de la guerre d'usure (exercice 12), montrer qu'il y a un équilibre mixte symétrique (les deux joueurs ont la même stratégie mixte), où chaque joueur tire au sort son temps de départ si l'autre n'est pas encore parti selon une distribution de probabilité continue f à support sur $I\!R_+$ tout entier.

Exercice 39 Deux entreprises A et B, situées dans une même ville, produisent le même bien. Le coût unitaire de production de chaque entreprise vaut $1/2$. Chaque entreprise doit fixer un prix de vente unitaire, p_A pour l'entreprise A et p_B pour l'entreprise B.

La ville est composée d'un continu de consommateurs. Chaque consommateur achète une unité du bien à une et une seule des deux entreprises.

L'ensemble des consommateurs est situé uniformément dans la ville, qui est linéaire et représentée par le segment [0,1].

Ville



L'entreprise A se situe à l'extremité ouest (point d'abscisse 0) de la ville, l'entreprise B se situe à l'extremité est (point d'abscisse 1) de la ville.

Chaque consommateur subit un coût de transport linéaire: se déplacer d'une distance y coûte $y/2$. Ainsi, si un consommateur habitant au point $x \in [0,1]$ achète à l'entreprise A, il perçoit un coût de $p_A + x/2$, et s'il achète à l'entreprise B, il perçoit un coût de $p_B + \frac{1-x}{2}$. Chaque consommateur achète son bien en choisissant l'entreprise dont le prix perçu est le plus bas.

On étudie le jeu où chaque entreprise choisit son prix de vente dans $[1/2, +\infty[$, et vend aux consommateurs qui se présentent chez elle. Pour simplifier, on considère que le nombre d'habitant de la ville est 1 (l'unité pouvant être par exemple le million), et donc si $3/4$ de la population achète à l'entreprise A, son profit est $3/4(p_A - 1/2)$ (celui de l'entreprise B sera alors de $1/4(p_B - 1/2)$ car $1/4$ de la population achète à B). Chaque entreprise veut maximiser son profit. On note g_A la fonction de paiement de l'entreprise A, et g_B celle de l'entreprise B.

A) <u>Calcul des fonctions de paiements</u>

Soient p_A et p_B dans $[1/2, +\infty[$ les prix fixés par les entreprises.

A1. Soit un consommateur situé en $x \in [0,1]$. Montrer que si $x > 1/2 + p_B - p_A$, le consommateur achète à la firme B. Montrer que si $x < 1/2 + p_B - p_A$, le consommateur achète à la firme A.

A2. Montrer que si $p_B - p_A > 1/2$, on a $g_A(p_A, p_B) = p_A - 1/2$ et $g_B(p_A, p_B) = 0$. Calculer $g_A(p_A, p_B)$ et $g_B(p_A, p_B)$ dans le cas où $p_A - p_B > 1/2$.

A3. On suppose $p_B - p_A \in [-1/2, +1/2]$. Montrer que:

$$g_A(p_A, p_B) = (1/2 + p_B - p_A)(p_A - 1/2) \text{ et } g_B(p_A, p_B) = (1/2 + p_A - p_B)(p_B - 1/2).$$

B) <u>Calcul des meilleures réponses</u>

Fixons le prix p_B de l'entreprise B. Montrer que la meilleure réponse de l'entreprise A est de fixer un prix p_A tel que (on pourra faire 3 cas, selon que $p_B \in [1/2, 1]$, $p_B \in [1, 2]$ ou $p_B \geq 2$):

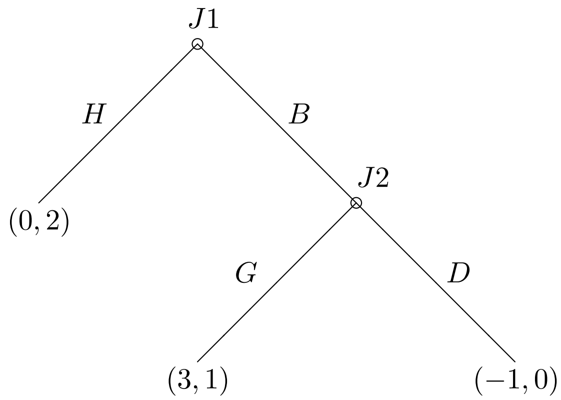
$$p_A = \frac{1+p_B}{2} \text{ si } p_B \leq 2,\ p_A = p_B - 1/2 \text{ si } p_B \geq 2.$$

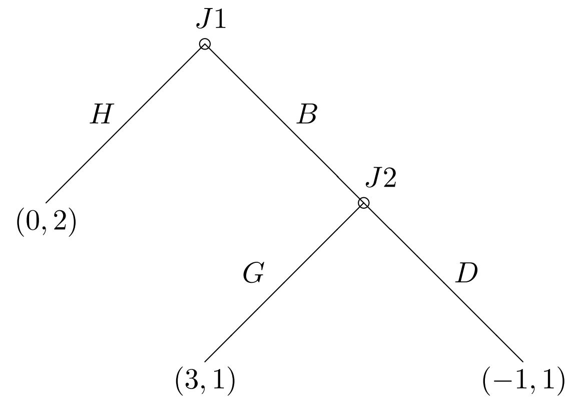
Enoncer la meilleure réponse de l'entreprise B au prix de l'entreprise A (par symétrie, il est inutile de refaire les calculs).

C) Calculer le ou les équilibres de Nash du jeu, et les paiements associés.

Feuille 5 : jeux sous forme extensive

Exercice 40 ($*$) Pour chacun des jeux suivants :





1) Mettre le jeu sous forme normale.
2) Calculer les équilibres de Nash en stratégies pures.
3) Calculer les équilibres en stratégies mixtes. Quel est l'ensemble des paiements de ces équilibres ?
4) Calculer les équilibres sous-jeux parfaits.

Exercice 41 ($*$) (jeu des allumettes) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note G_n le jeu à deux joueurs suivants. Il y a initialement n allumettes sur une table. Les joueurs jouent alternativement. Au premier coup, dans la limite du nombre d'allumettes présentes sur la table, le joueur 1 peut en prendre une, deux ou trois (mais pas zéro). Puis, le joueur 2 peut à son tour en prendre une, deux ou trois, puis c'est au joueur 1, etc. Le joueur qui prend la dernière allumette a perdu.

1. Vous êtes le joueur 1. Vous devez jouer au jeu G_{63}. Quel est votre meilleur premier coup ?

2. Montrer que dans le jeu G_n un des joueurs a une stratégie gagnante. Pourquoi n'est-il pas possible que les deux joueurs aient une stratégie gagnante ?

3. Pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, dire quel joueur a une stratégie gagnante et donner une telle stratégie (on pourra ne définir que la stratégie réduite correspondante). On commencera par étudier le cas $n = 1$, puis $n = 2$, etc. jusqu'à ce que la lumière se fasse.

4. Même question mais pour le jeu G'_n, défini de la même manière que G_n sauf que le joueur qui prend la dernière allumette gagne. Y-a-t-il des valeurs de n pour lesquelles le joueur 1 ait une stratégie gagnante à la fois dans G_n et dans G'_n ?

Exercice 42 (TD) (Chomp) Pour n, m deux entiers strictement positifs, on définit le jeu à deux joueurs $G(n, m)$ suivant. Soit $P(n, m)$ l'ensemble des points du plan $\mathbb{R}^2$ à coordonnées entières positives ou nulles dont l'abcisse est strictement inférieure à n et dont l'ordonnée est strictement inférieure à m. Une pierre est placée sur chacun de ces points (il y a donc m rangées de n pierres). Le joueur 1 joue en premier. Il choisit une pierre et enlève toutes les pierres dont les deux coordonnées sont supérieures ou égales à celles de la pierre choisie. C'est ensuite au joueur 2 de jouer selon la même règle. Le jeu se poursuit en alternant les joueurs. Celui qui prend la dernière pierre a perdu. On définit de même le jeu $G(\infty, \infty)$ en prenant tous les points à coordonnées entières positives ou nulles.

1- Montrer que dans le jeu $G(n, m)$, le joueur 1 a une stratégie gagnante (on ne demande pas de la trouver).

2- Trouver une stratégie gagnante pour $G(n, n)$ et pour $G(2, n)$.

3- Que pensez vous de $G(\infty, \infty)$?

Exercice 43 (TD) (Duopoles de Cournot et de Stackelberg avec demande linéaire) Deux firmes produisent le même bien à un coût de production marginal constant égal à $c \in]0, 1[$. Si le prix du bien est p, la demande est $D(p) = 1 - p$. Chaque firme $i \in \{1, 2\}$ choisit la quantité $q^i \geq 0$ qu'elle produit. Le "marché" égalise l'offre et la demande et le prix s'établit alors à $p = 1 - (q^1 + q^2)$ (p peut être négatif). Chaque firme i vend alors la quantité q^i de bien au prix p. Chaque firme cherche à maximiser son profit. On ne considère que des stratégies pures.

1) (Cournot) On suppose que les choix se font de manière simultanée. Ecrire le jeu sous forme stratégique associé. Montrer qu'il a un unique équilibre de Nash.

2) (Stackelberg) On suppose que la firme 1 (meneuse) choisit sa quantité produite q_1 avant la firme 2 (suiveuse). La firme 2 choisit la quantité q_2 qu'elle produit en connaissant q_1.

a) Ecrire le jeu sous forme stratégique associé.

b) Pourquoi peut-on être sur, sans calculs, que dans n'importe quel équilibre de Nash sous-jeux parfait, le paiement de la firme 1 est au moins égal à son paiement dans l'équilibre du jeu de Cournot ?

c) Montrer qu'il existe plusieurs équilibres de Nash, mais un seul équilibre sous-jeux parfait. Le déterminer et le comparer avec l'équilibre du jeu de Cournot.

Exercice 44 (Jeu de Nim) Il s'agit d'un jeu à deux joueurs dont les règles sont les suivantes. On dispose d'un ensemble de n jetons (avc $n \in \mathbb{N}^*$). Le premier joueur partitionne cet ensemble en deux sous ensembles non-vides. Le second joueur choisit un de ces deux sous ensembles et le partionne à son tour. Le premier en choisit un, le partitionne etc ... Le jeu se termine dès qu'un joueur choisit un singleton et ce joueur est alors déclaré gagnant. Formellement:

Le jeu G_n^i est le jeu de Nim ou le joueur i joue en premier. G_1^i : le joueur i gagne (et $j \neq i$ perd).

G_n^i $(n > 1)$: - le joueur i choisit $n_i \in \{1, \dots, n-1\}$

- le joueur j choisit $n_j \in \{n_i, n - n_i\}$

- on joue le jeu $G_{n_j}^j$.

1- Expliciter les jeux G_2^1, G_3^1, G_4^1.

2- Soit N^α (resp. N^β) l'ensemble des entiers n pour lesquels le joueur i (resp. j) a une stratégie gagnante dans G_n^i.

Montrer que $1 \in N^\alpha$ et que pour $n \geq 2$

$n \in N^\alpha \iff \exists n_1, 1 \leq n_1 \leq n-1,\ n_1 \in N^\beta$ et $n - n_1 \in N^\beta$

$n \in N^\beta \iff \forall n_1, 1 \leq n_1 \leq n-1,\ n_1 \in N^\alpha$ ou $n - n_1 \in N^\alpha$

Montrer ensuite par récurrence que N^α est l'ensemble des entiers positifs de la forme $5p-1, 5p, 5p+1$ et que N^β est l'ensemble des entiers positifs de la forme $5p+2, 5p+3$.

Exercice 45 Anouk et Basile ont le même ordinateur portable. Malheureusement, les deux ordinateurs ont été volés. L'assurance impose la règle suivante. Anouk et Basile doivent annoncer chacun la valeur estimée de leur ordinateur. Les choix sont faits simultanément. Soit x la valeur annoncée par Anouk et y la valeur annoncée par Basile. Si $x = y$ alors chacun reçoit cette somme. Si $x < y$, alors Anouk reçoit $x + 2$ et Basile reçoit $x - 2$. Si $x > y$, alors Anouk reçoit $y - 2$ et Basile reçoit $y + 2$. On suppose que les valeurs annoncées doivent être choisies parmi les nombres entiers compris entre 2 et 1000.

1) Soit n un entier entre 2 et 1000. Si Anouk joue n, quelle est la meilleure réponse de Basile ? (on pourra distinguer le cas $n = 2$ du cas $n \neq 2$)

2) Montrer que $(2; 2)$ est le seul équilibre de Nash en stratégies pures du jeu.

3) (difficile : on peut passer) Montrer que $(2, 2)$ est aussi le seul équilibre mixte.

4) On suppose maintenant qu'Anouk joue avant Basile : Anouk choisit x de manière irréversible, puis Basile, connaissant x, choisit y. Résoudre ce jeu par induction à rebours (backward induction) et comparer avec l'équilibre de Nash du jeu simultané.

Exercice 46 On considère deux joueurs qui veulent se partager un gateau dont la taille est normalisée à 1.

Jeu statique. Le joueur 1 commence par proposer au joueur 2 un partage $(x, 1-x)$ avec $x \in [0, 1]$ (il prend x pour lui). Le joueur 2 peut dire Oui ou Non. Si il accepte, les paiements sont $(x, 1-x)$ et $(0, 0)$ sinon. Montrer que pour tout x, il existe un équilibre de Nash dans lequel le joueur 1 propose x et le joueur 2 accepte. Montrer qu'il y a un seul ESJP (équilibre sous-jeux parfait) et que le paiement est $(1, 0)$.

Jeu dynamique. Les joueurs peuvent maintenant alterner offres et contre-offres, en proposant l'un après l'autre. Pour les inciter à arriver "vite" à un accord, on suppose que la taille du gateau est multipliée par un facteur fixé $0 < \delta < 1$ à chaque étape. On considère Γ_T, le jeu à T étapes suivant.

Etape 1: Le joueur 1 propose au joueur 2 un partage $(x_1, 1 - x_1)$. Le joueur 2 peut dire Oui ou Non. Si il accepte, les paiements sont $(x_1, 1 - x_1)$, sinon on passe à l'étape 2.

Etape 2: Le joueur 2 propose au joueur 1 un partage $(x_2, 1 - x_2)$. Le joueur 1 peut dire Oui ou Non. Si il accepte, les paiements sont $(\delta x_2, \delta(1 - x_2))$, sinon on passe à l'étape 3.

Etape $t = 2k - 1$: Le joueur 1 propose au joueur 2 un partage $(x_t, 1 - x_t)$. Le joueur 2 peut dire Oui ou Non. Si il accepte, les paiements sont $(\delta^{t-1} x_t, \delta^{t-1}(1 - x_t))$, sinon on passe à l'étape $t + 1$.

Etape $t = 2k$: Le joueur 2 propose au joueur 1 un partage $(x_t, 1 - x_t)$. Le joueur 1 peut dire Oui ou Non. Si il accepte, les paiements sont $(\delta^{t-1} x_t, \delta^{t-1}(1 - x_t))$, sinon on passe à l'étape $t + 1$.

Si toutes les offres sont refusées, le paiement final est $(0, 0)$.

Le but est de résoudre Γ_T par récurrence amont et de trouver ses paiements d'ESJP.

1- On considère le jeu $\Gamma_2(x, y)$, avec $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x + y \leq 1$, définit comme suit.

Etape 1: Le joueur 1 propose au joueur 2 un partage $(x_1, 1 - x_1)$. Le joueur 2 peut dire Oui ou Non. Si il accepte, les paiements sont $(x_1, 1 - x_1)$, sinon on passe à l'étape 2.

Etape 2: Le joueur 2 propose au joueur 1 un partage $(x_2, 1 - x_2)$. Le joueur 1 peut dire Oui ou Non. Si il accepte, les paiements sont $(\delta x_2, \delta(1 - x_2))$, sinon les paiements sont $(\delta^2 x, \delta^2 y)$.

Chercher les ESJP de $\Gamma_2(x, y)$ par récurrence amont. Vérifier en particulier que le paiement d'ESJP est unique. On le notera par la suite $F(x, y)$.

2- Pour tout T, on note maintenant $U_T = (u_T, v_T)$ un paiement d'ESJP de Γ_T. Montrer par récurrence amont que pour tout T, U_T est unique et vaut $F(U_{T-2})$. Calculer U_T pour tout T. Donner la limite quand T tend vers l'infini.

Exercice 47 $(*)$ Soit T un entier plus grand que 4. On considère le jeu suivant, noté G_T, qui dure au plus T étapes : aux étapes impaires (resp. paires) le joueur 1 (resp. 2) décide de poursuivre ou d'interrompre une relation commerciale. A chaque fois que l'un des joueurs poursuit la relation, le paiement final de chaque joueur augmente de 1. Si l'un des joueurs interrompt la relation, son paiement final augmente de 2, le paiement final de l'autre joueur n'augmente pas, et le jeu se termine. A la période T, le jeu se termine de toute façon. Si les joueurs poursuivent la relation jusqu'au bout, les paiements seront donc (T, T) ; si le joueur 1 arrête à la première période, les paiements sont $(2, 0)$, etc.

1) Modéliser cette situation par un jeu sous forme extensive. Quel est le seul équilibre sous-jeux parfait?

2) Pensez-vous que jouer G_T en tant que joueur 2 revienne au même que jouer G_{T-1} en tant que joueur 1, au sens où vous devriez avoir la même stratégie dans ces deux situations ?

3) Supposons que vos croyances soient les suivantes. Avec probabilité $1 - \epsilon$ l'autre joueur est du type "I" (interrompre à chaque coup). Avec probabilité $\epsilon \in [0, 1[$, l'autre joueur est du type "P" (poursuivre à chaque coup). De plus, à chaque coup, avec probabilité $\mu \in [0, 1/2[$, l'autre joueur fait une erreur d'implémentation. Par exemple, à chaque coup, si l'autre joueur est de de type I, il n'interrompt la relation qu'avec probabilité $1 - \mu$. Vous pensez de plus que vous ne faites jamais d'erreurs d'implémentation, et vous cherchez à maximiser votre paiement espéré.

a) Supposons que vous soyez le joueur 1. Montrez que pour ϵ et μ suffisament petits, vous avez intêret à arrêter la relation au premier coup. On pourra se contenter d'étudier le cas $\epsilon = 0$.

b) Supposons que vous soyez le joueur 2. Montrer que si μ est suffisamment petit devant ϵ, vous n'avez pas intérêt à interrompre la relation, sauf éventuellement à la dernière étape ou vous ayez le trait. On pourra se contenter d'étudier le cas $\mu = 0$.

4) Réexaminer la question 2) à la lumière de la question 3).

Exercice 48 (jeu des pirates) n pirates se partagent un butin de 100 pièces d'or. Ils sont tous d'âges différents et utilisent la méthode suivante : les pirates sont classés du plus vieux au plus jeune ; le plus vieux (pirate 1) propose un partage, c'est à dire un n-uplet $(k_1, ..., k_n)$ où les k_i sont des entiers positifs ou nuls de somme égal à 100. Les n pirates votent alors à main levée : ils peuvent accepter ou refuser (mais pas s'abstenir). Si au moins la moitié des pirates accepte, le partage est effectif : le pirate i reçoit k_i pièces d'or. Sinon, le pirate 1 est éliminé et la même procédure recommence entre les pirates $(2, 3, ..., n)$: le pirate 2 propose un partage, si au moins la moitié des pirates non éliminés sont d'accord le partage se fait, sinon le pirate 2 est éliminé, etc. Ainsi, s'il y a m pirates non éliminés, le partage se fait si au moins $m/2$ pirates votent pour quand m est pair, si au moins $(m+1)/2$ pirates votent pour quand m est impair.

On fait l'hypothèse (H) suivante : si un pirate est indifférent entre accepter et refuser un partage, il le refuse.

a) Déterminer les équilibres sous-jeux parfait du jeu vérifiant l'hypothèse (H) pour $n = 2$, $n = 3$ et $n = 5$.

b) Même question pour un nombre quelconque n de pirates.

c) Toujours sous l'hypothèse (H), est-il vrai que dans tout équilibre sous-jeu parfait le pirate le plus vieux obtient un nombre strictement positif de pièces d'or ?

Exercice 49 (TD) (Bataille des sexes avec option d'entrée). Soient x et y des réels. On considère le jeu à deux joueurs suivant. Au premier coup, le joueur 1 doit choisir entre "ne pas jouer" (N) et "jouer" (J). S'il décide de ne pas jouer les paiements sont de (x, y). Si elle décide de jouer, les deux joueurs jouent une batailles des sexes, représentée sous forme normale par la bimatrice suivante :

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} G & D \end{array} \\ \begin{array}{c} H \\ B \end{array} & \begin{pmatrix} 2,1 & 0,0 \\ 0,0 & 1,2 \end{pmatrix} \end{array}$$

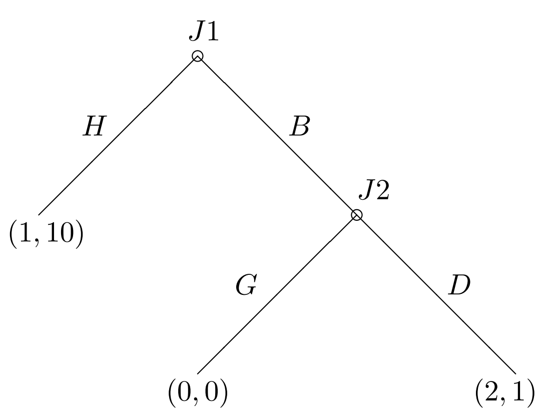
Représenter le jeu sous forme extensive, puis déterminer, en fonction de la valeur de x et de y, les équilibres de Nash purs et les équilibres sous-jeux parfaits purs.

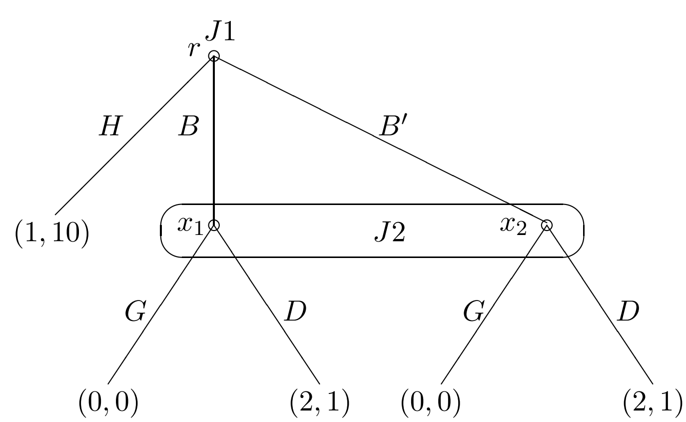
Exercice 50 ($*$) La notion d'équilibre sous-jeux parfait a été inventée essentiellement pour écarter des équilibres fondés sur des menaces non crédibles. Le but de cet exercice est de montrer que, dans des jeux à information imparfaites, certains équilibres sous-jeux parfaits peuvent néanmoins être non crédibles. De plus, des jeux dont l'analyse par des joueurs rationnels devrait être la même peuvent ne pas avoir les mêmes équilibres sous-jeux parfaits.

1 - En quoi les deux jeux suivants représentent-ils la même interaction stratégique ?

2- Calculer leurs équilibres de Nash purs et leurs équilibres sous-jeux parfaits purs. Pensez-vous que tous les équilibres sous-jeux parfaits du jeu de droite soient crédibles ? Expliquer.

3- Quels sont les équilibres sous-jeux parfaits du jeu de droite qui vérifient la condition suivante : à tout ensemble d'information qui n'est pas un singleton, le joueur concerné doit avoir une croyance sur le noeud auquel il se trouve, et ses actions ultérieures doivent maximiser son paiement étant donnée cette croyance et les stratégies des autres joueurs (dans ce jeu, cette condition prend la forme smple suivante : si le joueur 2 est amené à jouer, il doit se dire : je pense que je suis au noeud x_1 avec probabilité p, au noeud x_2 avec probabilité $1-p$, et l'action qu'il joue doit maximiser son paiement espéré étant donnée cette croyance) ?





Feuille 6 : Jeux à information incomplète, valeur de l'information

Exercice 51 (Enchères au premier prix sous plis scellés)

Un bien est mis aux enchères. Il y a 2 acheteurs potentiels. La procédure d'enchères est la suivante: chaque acheteur propose un prix pour le bien en soumettant une offre écrite sous pli scellé. Les deux plis sont transmis à un commissaire priseur. L'acheteur ayant soumis l'offre la plus haute emporte le bien (en cas de propositions identiques, on tire aléatoirement de façon équiprobable celui qui achète l'objet) et paye le prix qu'il a proposé .

Chaque acheteur $i \in \{1, 2\}$ a une valuation v^i dans $[0, 1]$, qui représente la somme à laquelle il évalue le bien. Si l'acheteur i achète le bien au prix p, son utilité est $v^i - p$. S'il ne l'achète pas, son utilité est nulle. Chaque acheteur connait sa valuation, et a une croyance uniforme sur $[0, 1]$ concernant la valuation de l'autre acheteur.

1. Modéliser cette situation par un jeu Bayésien.

2. Montrer qu'il existe un unique équilibre en stratégies pures (σ^1, σ^2) qui soit symétrique ($\sigma^1 = \sigma^2 = f$), avec f strictement croissante et dérivable.

Exercice 52 (TD) (Double enchère.)

Un vendeur (joueur 1) et un acheteur (joueur 2) négocient la vente d'un bien indivisible. Le coût pour le vendeur est c et la valeur pour l'acheteur est v. On suppose que c et v sont indépendants, tirés selon la loi uniforme sur $[0, 1]$. Le vendeur et l'acheteur soumettent simultanément des offres b_1 et b_2. Si $b_1 > b_2$, l'échange n'a pas lieu. Sinon, l'échange a lieu et le prix est fixé à $(b_1 + b_2)/2$.

1- Calculer les paiements des deux joueurs.

2- On suppose que l'information est complète (i.e. v et c connus des deux joueurs) et que $v > c$. Montrer qu'il existe un continuum d'équilibres en stratégies pures.

3- On se place en information incomplète (chacun connaît alors uniquement sa valuation c ou v) et on cherche un équilibre en stratégies pures $s_1(.), s_2(.)$. Montrer que $s_1(.), s_2(.)$ sont nécessairement croissantes.

4- En supposant les $s_i(.)$ strictement croissantes et C^1, donner le couple d'équations différentielles caractérisant les équilibres. Chercher un couple de solutions affines. A quelle condition y a t-il échange ? Comparer l'efficience économique des équilibres en information complète et en information incomplète.

Exercice 53 (Duopole de Stackelberg avec information incomplète d'un côté) On considère la concurrence en quantité de deux firmes. La firme 1 est *leader* mais ne connaît pas avec certitude le coût de production de la firme 2. Plus précisément, l'interaction se déroule ainsi : la firme 1 produit une quantité $q_1 \in \mathbb{R}_+$, que la firme 2 observe; connaissant q_1, la firme 2 produit une quantité $q_2 \in \mathbb{R}_+$. Les quantités produites sont vendues au prix $p = 1 - q_1 - q_2$. Pour $i \in \{1, 2\}$, le coût total de production d'une quantité q_i pour la firme i est de $C_i(q_i) = c_i q_i$. Le coût de production de la firme 1 est nul : $c_1 = 0$. La firme 1 pense qu'avec probabilité 1/2, $c_2 = 0$, et qu'avec probabilité 1/2, $c_2 = 1$. La firme 2 connaît son vrai coût de production. Enfin, l'utilité d'une firme est égale à son profit espéré et toute cette description de l'interaction est connaissance commune.

Ci-dessous, on dira que la firme 2 est de type B si $c_2 = 0$ et de type H si $c_2 = 1$.

1. Définir la notion de stratégie pure pour la firme 1 et pour la firme 2 de type H.
2. Notons $q_2^H(\cdot)$ et $q_2^B(\cdot)$ les fonctions de meilleure réponse d'une firme 2 de type H et de type B, respectivement.
   a) Montrer que $q_2^H(q_1) = 0$ pour tout q_1 dans $\mathbb{R}_+$.
   b) Déterminer $q_2^B(q_1)$ en fonction de q_1.
3. Soit $x > 1$. Montrer que pour la firme 1, produire la quantité $q_1 = x$ est une stratégie strictement dominée.
4. Montrer qu'il existe un unique équilibre parfait en sous-jeux et le déterminer.
5. L'énoncé implique que la firme 2 connaît le coût de production de la firme 1. Est-ce une hypothèse importante ? Pourquoi ?

Exercice 54 (TD) (Un exemple de transmission stratégique d'information)

On considère une interaction à deux joueurs dans laquelle un état de la nature $k = 1, 2$ est choisi au hasard de manière équiprobable. Cet état est observé par le joueur 1 mais pas par le joueur 2. Le joueur 1 doit alors envoyer un message $m \in \{A, B\}$ au joueur 2. Le joueur 2 devra choisir une action $s \in \{G, M, D\}$. Le paiement de chaque joueur dépend uniquement de k et s. Les couples de paiements sont les suivants. Etat $k = 1$: $G \to$ (0,6); $M \to$ (2,5); $D \to$ (0,0). Etat $k = 2$: $G \to$ (0,0); $M \to$ (2,5); $D \to$ (2,12).

1- Ecrire la forme extensive de ce jeu en précisant les espaces de stratégies.

2- Determiner les équilibres de Nash en stratégies pures de ce jeu. On distinguera notamment suivant le nombre (1 ou 2) de messages différents envoyés par le joueur 1. Calculer les paiements d'équilibres pour chaque joueur. Quel est l'équilibre le plus favorable au joueur 1?

3- Montrer que le couple de stratégies suivant est un équilibre. Joueur 1 : jouer A si $k = 1$ et (A avec proba 1/2; B avec proba 1/2) si $k = 2$; Joueur 2 : jouer M si A et D si B. Calculer le paiement de cet équilibre. Le joueur 1 a t-il intéret à réveler son information (complètement, pas du tout, partiellement) ?

Exercice 55 ($*$) (Un exemple où "la valeur de l'information est négative")

A) Considérons le jeu à deux joueurs suivant. La nature (ou un médiateur) tire une pièce à Pile ou Face de façon équiprobable. Aucun des joueurs n'observe le résultat du tirage. Le joueur 1 doit annoncer soit Pile, soit Face. Le joueur 2 entend l'annonce du joueur 1 puis annonce à son tour soit Pile, soit Face. Les joueurs observent finalement le résultat du tirage de la nature. Un joueur qui a annoncé un mauvais résultat (annonce de Pile alors que c'est Face, ou vice-versa) a un paiement de 0. Un joueur qui a annoncé le bon résultat reçoit un paiement de 2 si son adversaire a également annoncé le bon résultat, et de 6 sinon.

Mettre ce jeu sous forme extensive, puis sous forme normale [conseil : utilisez des indices ou des "prime" pour différencier les actions Pile et Face des différents joueurs, et les actions semblables mais à des ensembles d'informations différents]. Quel est l'ensemble des paiement d'équilibres de Nash ?

B) On modifie la règle du jeu de la façon suivante: la pièce est montrée au joueur 1 (mais pas au joueur 2) avant qu'il annonce. Le joueur 2 le sait.

Mêmes questions qu'en A. Interprétation ?

C) Que pensez-vous de la situation où la pièce est montrée au joueur 1 mais où le joueur 2 pense que le jeu se déroule comme en A) ?

Feuille 7 : Jeux répétés

Préliminaires : dans tous les exercices ci-dessous, les joueurs évaluent leurs paiements avec le même facteur d'escompte δ. Soit T un entier naturel non nul. Si le jeu de base est noté G, on note G^T le jeu obtenu en répétant T fois le jeu G et où, pour tout t dans $\{2, ..., T\}$, avant de choisir son action de l'étape t, chaque joueur observe les actions prises par les deux joueurs à toutes les étapes précédentes. Un tel jeu est dit "à observation parfaite."

Partie I : Jeux répétés un nombre fini de fois

Exercice 56 ($*$) (observation parfaite vs observation imparfaite) On considère le jeu de base G suivant :

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} A & B \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \end{array} & \begin{pmatrix} 4,4 & 0,0 \\ 0,0 & 1,1 \end{pmatrix} \end{array}$$

a) Représenter rapidement le jeu G^2 comme un jeu sous forme extensive (pas la peine d'indiquer les paiements). Combien le joueur 1 a-t-il de stratégies pures dans le jeu G^2 ? Et le joueur 2 ?

b) On note $\hat{G}^2$ le jeu obtenu en répétant deux fois le jeu G, mais où avant de choisir son action dans la deuxième étape chaque joueur observe uniquement son action de l'étape 1 mais pas l'action de l'autre joueur. Représenter le jeu $\hat{G}^2$ comme un jeu sous forme extensive (pas la peine d'indiquer les paiements). Combien chaque joueur a-t-il de stratégies pures dans le jeu $\hat{G}^2$?

Exercice 57 (∗) (à ne faire qu'après l'exercice précédent). Soit G le jeu de base suivant :

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} & \begin{pmatrix} 10,10 & 0,11 & -1,0 \\ 11,0 & 1,1 & 0,0 \\ 0,-1 & 0,0 & 3,3 \end{pmatrix} \end{array}$$

a) Combien le joueur 1 a-t-il de stratégies pures dans le jeu G^T ? Et le joueur 2 ?

b) On note $\hat{G}^T$ le jeu obtenu en répétant T fois le jeu G, mais où, pour tout t dans $\{2, ..., T\}$, avant de choisir son action de l'étape t, chaque joueur observe (se souvient de) toutes les actions qu'il a prises mais n'observe aucune des actions prises par l'autre joueur aux étapes précédentes. Montrer qu'il n'existe aucun équilibre en stratégies pures où l'action A soit prise sur le chemin d'équilibre [on pourra raisonner en termes de stratégies réduites].

Exercice 58 On considère le jeu de base G suivant :

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} & \begin{pmatrix} 10,10 & 0,11 & -1,0 \\ 11,0 & 1,1 & 0,0 \\ 0,-1 & 0,0 & 3,3 \end{pmatrix} \end{array}$$

1) Déterminer les stratégies pures strictement dominées et les équilibres de Nash en stratégie pures du jeu G.

Dans le jeu répété G^T, pour $i \in \{1, 2\}$, on note s_i la stratégie pure du joueur i définie ainsi :
- à l'étape 1 : jouer A ;
- aux étapes 2 à $T-1$: jouer A si les deux joueurs ont toujours joué A aux étapes précédentes, jouer B sinon ;
- à l'étape T : jouer C si les deux joueurs ont toujours joué A aux étapes précédentes, jouer B sinon.;

2) Dans le cas $T = 2$, calculer le paiement de s_1 contre s_2 ; calculer, en fonction de δ, le meilleur paiement que le joueur 1 puisse obtenir contre s_2. Pour quelles valeurs de δ le profil (s_1, s_2) est-il un équilibre ? un équilibre sous-jeux parfait ? Commenter.

3) On suppose dans cette question que $T = 3$ et que le joueur 2 joue s_2. Calculer le paiement de s_1. Calculer le meilleur paiement que le joueur 1 puisse obtenir :

i) avec une stratégie qui joue A au premier tour et qui joue A au deuxième tour quand les deux joueurs ont joué A au premier tour ;

ii) avec une stratégie qui joue A au premier tour mais qui ne joue pas A au deuxième tour quand les deux joueurs ont joué A au premier tour ;

iii) avec une stratégie qui ne joue pas A au premier tour.

Déterminer en fonction de δ une meilleure réponse à s_2.

4) Dans le jeu G^3, pour quelles valeurs de δ le profil (s_1, s_2) est-il un équilibre ? un équilibre sous-jeux parfait ? Comparer les deux taux d'escompte limites, comparer au résultat de la question 2) et commenter. Dans le cas $\delta = 1$, calculer les paiement associés à (s_1, s_2). Comparer aux meilleurs paiements que l'on puisse obtenir en répétant un équilibre du jeu de base. Commenter.

Partie II : Jeux répétés un nombre infini de fois

Exercice 59 Escompter les paiements avec un facteur d'escompte δ peut être interprété de plusieurs manières, dont celles-ci :

i) le jeu est répété un nombre infini de fois, mais les joueurs attachent plus d'importance à leur paiements d'aujourd'hui qu'à leur paiements de demain.

ii) à chaque étape, on rejoue le jeu de base avec probabilité δ, et avec probabilité $1 - \delta$ le jeu s'arrête. En revanche, conditionnellement au fait que le jeu soit jouée au moins $t + 1$ fois, les joueurs accordent autant d'importance à leur paiements de la date t qu'à leur paiements de la date $t + 1$.

1) Critiquer chacune de ces interprétations.
2) On suppose que, d'une part, à chaque étape, le jeu de base est répété avec probabilité $p \in [0,1]$, et que d'autre part, conditionnellement au fait que le jeu dure exactement T étapes, le paiement d'un joueur est la somme de ses paiements entre les étapes 1 et T, escomptés avec le facteur d'escompte δ. Montrer qu'on peut représenter cette situation par un jeu répété où les paiements sont escomptées avec un facteur δ qu'on précisera.

Exercice 60 (influence du nombre de firmes concurrentes sur les possibilités de collusion).

On considère un jeu répété un nombre infini de fois et où à chaque période n firmes produisent un bien identique et le vendent à des consommateurs. Le coût de production est nul. La demande au prix p est nulle si $p \geq 1$ et est de $D(p) = 1 - p$ sinon. Les firmes cherchent à maximiser la somme escomptée de leurs profits. Les firmes ont le même facteur d'escompte δ.

La concurrence entre les firmes peut se modéliser (notamment) des deux manières suivantes :.

i) Concurrence en prix (à la Bertrand) : simultanément, chaque firme propose un prix de vente. La demande s'adresse entièrement à la firme, ou aux firmes, qui proposent le prix le plus bas. Si k firmes ont choisi le prix le plus bas p, alors elles vendent chacune une quantité $D(p)/k$.

ii) Concurrence en quantité (à la Cournot) : les firmes choisissent de manière indépendante la quantité qu'elles produisent (on notera $q_i(t)$ la quantité produite par la firme i à la période t et $Q_t = \sum_{1 \leq i \leq n} q_i(t)$) ; une fois les quantités produites observées, les firmes vendent toutes le bien au prix p_t tel que $D(p_t) = Q_t$.

Questions :

1) Dans le modèle de concurrence en prix :

a) dans le jeu de base, déterminer le prix de vente qui maximise les profits des firmes ; déterminer le ou les équilibres de Nash en stratégies pures (pas de justifications demandées).

b) dans le jeu répété, définir une stratégie de collusion "à gâchette".

c) pour quels facteurs d'escompte le profil de stratégie correspondant est-il un équilibre de Nash du jeu répété ? un équilibre sous-jeux parfait ? Quel est l'influence du nombre de firmes ? Commenter.

2) Même questions pour le modèle de concurrence en quantité.
3) Comparer les facteurs d'escompte critiques pour le modèle de concurrence en prix et le modèle de concurrence en quantité. Commenter.
4) Pourquoi la collusion entre firmes est-elle interdite ? Quels avantages voyez-vous à que les pouvoirs public essaient d'empêcher les situations de concurrence entre un petit nombre de firmes ? Les trois grandes firmes de téléphonie mobile en France ont été accusées d'ententes illégales sur les tarifs pratiqués. Etant donné la structure de cette industrie, fallait-il s'attendre à des ententes illégales entre firmes ?

Feuille 8 : Jeux expérimentaux et exercices divers

Exercice 61 (Jeu de l'ultimatum, version 1) Un expérimentateur propose à deux joueurs de se partager une somme de 100 euros suivant le processus suivant : le joueur 1 propose une répartion du type k euros pour lui et $100 - k$ pour le joueur 2, où k est un entier entre 0 et 100. Le joueur 2 accepte ou refuse. Si le joueur 2 accepte, le partage est effectué. S'il refuse, l'expérimentateur reprend ses 100 euros et les deux joueurs ne gagnent rien. Les deux joueurs interagissent via des ordinateurs, ne se voient pas, et ne connaissent pas l'identité de l'autre. De plus le jeu n'est pas répété (les joueurs interagissent une fois et c'est tout). Pour information, ce jeu est un des jeux qui a été le plus testé en laboratoire.

1) Si vous étiez joueur 1, quel partage proposeriez-vous ?

2) Si vous étiez joueur 2, quelle serait votre stratégie ?

3) En moyenne, que pensez-vous que font les joueurs 1 ? les joueurs 2 ? En particulier, que pensez-vous que le joueur 2 fasse si le joueur 1 propose le partage $(99, 1)$?

4) En supposant que l'utilité des joueurs est égal à leur gain monétaire, représenter le jeu sous forme extensive (symboliquement : on ne va pas écrire les 100 actions possibles du joueur 1 !). Que prévoit un raisonnement par induction à rebours ?

5) Selon vous, comment peut-on expliquer l'écart apparent entre la solution théorique du jeu et la manière de jouer réelle des gens ?

Exercice 62 (Jeu de l'ultimatum, version 2.) Le jeu se joue comme dans l'exercice 61, sauf qu'auparavant, les deux joueurs doivent répondre à des questions de culture générale (type questions pour un champion), et que c'est celui qui répond le mieux qui est désigné joueur 1. A votre avis, cela change-t-il quelque chose ?

Exercice 63 (Jeu de l'ultimatum, version 3.) Le jeu se joue comme dans l'exercice 61, sauf que le joueur 1 ne peut faire que les deux offres suivantes : soit $(100, 0)$, soit $(99, 1)$. Le joueur 2 le sait. Que pensez-vous que le joueur 2 fasse si le joueur 1 propose $(99, 1)$?

Exercice 64 (Jeu de l'ultimatum, version 4). Le jeu se joue comme dans l'exercice 1, sauf qu'on rajoute une étape préliminaire. Au début, le joueur 1 a le choix entre accepter de jouer ou refuser. S'il refuse, il obtient 99 euros et le joueur 2 n'obtient rien. S'il accepte, le jeu est joué comme dans l'exercice 1. Que pensez-vous que le joueur 2 fasse si le joueur 1 accepte de jouer puis propose $(99, 1)$?

Exercice 65 Comparez votre réponse aux exercices 63 et 64 et à la question 3 de l'exercice 61. En pratique, on observe que l'offre $(99, 1)$ est souvent accepté dans les versions 3 et 4 alors qu'elle est presque toujours refusée dans la version 1. Pourquoi cela est-il incompatible avec l'hypothèse selon laquelle, dans un jeu qui aboutit à des gains monétaires les préférences des joueurs sur les issues ne dépendent que des gains monétaires associés à ces issues, indépendamment du jeu et de son déroulement ?

Exercice 66 (jeu de la contrainte : cf Falk and Kosfeld. 2006. "The Hidden Costs of Control." American Economic Review, 96(5): 1611–1630.).

Le jeu suivant met en scène deux joueurs, appelés respectivement le principal (joueur 1) et l'agent (joueur 2). L'agent dispose de 120 unités de monnaie. Il peut volontairement en transférer une partie au principal. Chaque unité de monnaie transférée est doublée, si bien que si l'agent transfère x unités, il lui en reste $120 - x$ et le principal reçoit $2x$. Avant que l'agent décide de son transfert volontaire, le principal peut imposer à l'agent de lui transférer au moins 10 unités (il en recevra donc au moins 20), l'agent restant libre de lui en transférer volontairement davantage.

1) Si le joueur 1 envoie 40 unités, quels sont les gains ?

2) Si vous étiez le principal, que feriez-vous ? Si vous étiez l'agent, que feriez-vous : a) si le principal impose la contrainte ? S'il ne l'impose pas ?

3) Une expérience de laboratoire a été faite, où l'on faisait joueur ce jeu à des "cobayes". A votre avis, quel a été le transfert moyen avec contrainte ? sans contrainte ? Résultats en note de bas de page. [1]

Exercice 67 Ceci n'est pas un exercice, juste une information. Un des meilleurs prédicteurs du succès scolaire est le suivant : demander à un enfant une glace à une boule tout de suite ou une glace à deux boules dans une heure. S'il préfère une glace à deux boules dans une heures, il a de bonnes chances de bien réussir à l'école.

Deux exercices sur l'intervention de l'Etat

Exercice 68 On considère une société composée de deux agents, appelés joueur 1 et joueur 2. Ces agents peuvent travailler plus ou moins. Travailler davantage leur apporte un revenu plus élevé, mais aussi une désutilité qui peut dépendre de l'agent. D'autre part, le pouvoir d'achat d'un joueur dépend non seulement de son revenu mais aussi, à travers les prix des biens dans l'économie, du revenu de l'autre joueur. De ce fait, l'utilité d'un joueur peut décroître quand l'autre joueur augmente son temps de travail.

---

[1] 1. Le transfert moyen de l'agent est de 17.5 avec contrainte et de 23 sans contrainte. Il y a peu de transferts au-dessus de 40, mais, sans contrainte, une proportion significative des agents transfèrent exactement 40. Des transferts de 40 sont beaucoup moins courants si le principal contraint l'agent. A peu près la moitié des agents contraints transfèrent exactement 10. En gros, imposer la contrainte implique que les transferts de 0 sont remplacés par des transferts de 10, alors que les transfère de 40 sont remplacés par des transferts d'environ 20.

2. Si la contrainte est imposée de manière exogène (elle fait partie de règles, ce n'est pas le principal qui l'a décidée), son effet négatif disparaît.

3. Environ 30 % des principaux choisissent d'imposer la contrainte.

4. Les principaux qui imposent la contrainte prédisent à peu près correctement les transferts de l'agent dans ce cas, mais sous-estiment grandement ce qu'ils auraient reçu s'ils n'avaient pas imposé la contrainte.

Formellement, l'utilité du joueur i si les joueur 1 et 2 travaillent respectivement t_1 et t_2 unités de temps par semaine est

$$u_i(t_1, t_2) = t_i - \lambda_i t_i^2 - \mu t_{-i}$$

où $t_{-1} = t_2$ et $t_{-2} = t_1$. Les temps de travail t_1 et t_2, ainsi que les paramètres λ_1, λ_2 et μ, sont des réels positifs ou nuls. Les joueurs sont rationnels.

Partie I : on suppose dans cette partie $\lambda_1 \neq \lambda_2$ et $\mu = 0$.

1) On suppose que les joueurs choisissent librement et indépendamment leur temps de travail (dans $I\!R_+$). Que choisira le joueur i ? Quelle sera la somme des utilités des joueurs ?

2) On suppose que l'Etat impose aux deux joueurs de travailler exactement t unité de temps par semaine (si bien que $t_1 = t_2 = t$).

2a) Quelle est la valeur de t maximisant $u_1(t,t) + u_2(t,t)$?

2b) Pour cette valeur de t, que vaut la somme des utilités des joueurs ? La comparer à la somme des utilités des joueurs lorsqu'ils choisissent librement leur temps de travail.

Partie II : Mêmes questions mais en supposant que $\lambda_1 = \lambda_2$ et $\mu > 0$.

Partie III (discussion)

1) De quel jeu étudié en cours le jeu de la partie II se rapproche-t-il ? Expliquer.

2) On suppose que l'Etat connaît parfaitement les préférences des joueurs et cherche à maximiser la somme de leur utilités (deux hypothèses fortes). Discuter de la pertinence d'une loi imposant une durée fixe du travail suivant la valeur des paramètres λ_1, λ_2 et μ.

Exercice 69 (la partie II est indépendante de la partie I)

Partie I : la technologie de production d'une firme est polluante ; pour l'inciter à réduire sa production, l'Etat peut imposer une taxe à l'entreprise, qui croît avec sa production. Cependant, imposer une taxe peut être coûteux pour l'Etat (coût de récolte de la taxe, de lutte contre l'évasion fiscale, etc). On modélise cette situation par le jeu suivant : le joueur 1, l'Etat, choisit un niveau de taxe par unité produite $t \in I\!R_+$. Connaissant t, le joueur 2, la firme choisit son niveau de production $q \in I\!R_+$. Le cout total de production est $C(q) = q^2$. Le prix de vente $p > 0$ est indépendant de q. La désutilité causée à l'Etat (due au dommage environnemental) par la production de q unités est de dq, avec $0 < d < p$. Enfin, imposer une taxe $t > 0$ a un coût fixe c. On suppose que la firme maximise son profit et que l'Etat maximise l'utilité de la société (qui comprend la firme). Si l'Etat choisit le niveau de taxe t et la firme le niveau de production q, les utilités sont donc : $U_2(t,q) = pq - C(q) - tq$ pour la firme et $U_1(t,q) = U_2(t,q) + tq - dq$.

a) Soit $t \in I\!R_+$. Déterminer la ou les meilleures réponses de la firme au niveau de taxe par unité t.

b) en supposant que l'Etat ait décidé d'imposer une taxe strictement positive, quel niveau de taxe lui conseilleriez-vous de choisir ? Pourquoi ?

c) à quelle condition sur les paramètres conseilleriez-vous à l'Etat d'imposer une taxe ($t > 0$) à la firme. Interpréter économiquement.

Partie II : on considère la variante simplifiée suivante. Le joueur 1 choisit une taxe faible : $t = t_b$, ou élevée : $t = t_h$. Connaissant t, le joueur 2 choisit une production faible : $q = q_b$, ou élevée : $q = q_h$. Les paiements sont les suivants : $(3,3)$ si (t_b, q_b), $(1,4)$ si (t_b, q_h), $(2,2)$ si (t_h, q_b) et $(0,0)$ si (t_h, q_h).

a) Représenter ce jeu sous forme extensive puis le mettre sous forme normale. On notera G le jeu sous forme normale.

b) Rappeler la définition d'une stratégie strictement dominée et d'une stratégie faiblement dominée. Dans le jeu G, y-a-t-il des stratégies pures strictement dominées ? faiblement dominées ? Si oui lesquelles.

c) Déterminer tous les équilibres de Nash (purs ou mixtes) du jeu G (On pourra commencer par déterminer les équilibres ou le joueur 1 joue en pur, puis les équilibres ou le joueur 1 ne joue pas en pur.). Lesquels sont des équilibres sous-jeux parfait du jeu sous forme extensive ?

d) On considère le jeu G répété un nombre fini de fois, les paiements étant escomptés. Est-il possible que dans un équilibre de ce jeu répété, le joueur 1 obtienne un paiement moyen de 3 ?

Partiel de théorie des jeux

Durée 2h. Tous documents et calculatrices interdits. Il faut tourner la page.

Les exercices sont indépendants. Le barême indiqué est très approximatif. Sauf mention contraire, les réponses doivent être justifiées.

Exercice 1 (2pts). Donner un exemple de jeu sous forme normale où les ensembles de stratégies des joueurs sont infinis et qui n'a pas d'équilibre de Nash. On prouvera qu'il n'y a pas d'équilibre de Nash.

Exercice 2 (3pts). Deux conducteurs A et B sont bloqués par un obstacle sur une route. Ils ont deux comportement possibles : aller dégager la route ou attendre dans leur voiture. Si les deux conducteurs aident à dégager la route, ils obtiennent chacun une utilité de 2. Si un conducteur attend dans sa voiture et que l'autre dégage la route, celui qui a attendu obtient une utilité de 4 et celui qui a dégagé la route une utilité de 0. Enfin, si les deux conducteurs attendent dans leur voiture, la route n'est pas dégagée et les deux conducteurs ont une utilité de -2.

a) Modéliser cette situation comme un jeu fini sous forme stratégique. On considère dans la suite que les joueurs peuvent jouer des stratégies mixtes.

b) Tracer sur un même schéma les correspondances de meilleure réponse des joueurs.

c) Déterminez les équilibres de Nash (purs ou mixtes) du jeu.

Exercice 3 (4pts) On considère le jeu fini à 2 joueurs sous forme stratégique suivant :

$$G = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} A_2 & B_2 & C_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} A_1 \\ B_1 \\ C_1 \end{array} & \begin{pmatrix} 4,4 & 0,0 & 9,0 \\ 0,0 & 1,1 & 0,0 \\ 0,9 & 0,0 & 8,8 \end{pmatrix} \end{array}$$

a) Donner la définition d'une stratégie strictement dominée. Déterminer toutes les stratégies pures qui sont strictement dominées par une stratégie pure ou mixte. Pour chacune de ces stratégies, spécifier une stratégie qui la domine strictement.

b) Donner la définition d'un équilibre de Nash (pur ou mixte). Déterminer l'ensemble des équilibres de Nash (purs ou mixtes) du jeu.

Exercice 4 (5pts) On considère n individus qui partagent un bureau et qui doivent faire des efforts pour que le bureau reste propre. Chaque individu choisit un niveau d'effort x_i dans $\mathbb{R}_+^*$. Si chaque individu $i \in \{1, ..., n\}$ fait l'effort x_i, la propreté du bureau est de $y = \ln\left(\sum_{j=1}^n x_j\right)$. L'utilité qui en résulte pour chaque individu est de $u_i = y - x_i^2/2$ (pour $i \in \{1, ..., n\}$).

a) Déterminer les efforts socialement optimaux, c'est à dire le vecteur $x^* = (x_1^*, ..., x_n^*)$ qui maximise la somme des utilités des individus.

b) On suppose dans toute la suite que les efforts sont choisis de manière indépendante. Préciser le jeu sous forme stratégique associé.

c) Montrer que dans tout équilibre de Nash, les individus font tous le même effort. Déterminer l'ensemble des équilibres de Nash.

d) Comparer les efforts d'équilibre avec les efforts socialement optimaux. Commenter.

Exercice 5 (6pts) (attention : ce n'est pas la même procédure d'enchères que dans le polycopié d'exercices)

Un bien est mis aux enchères. Il y a 2 acheteurs potentiels, l'acheteur 1 et l'acheteur 2. La procédure est la suivante. Chaque acheteur soumet une offre sous pli scellé (il écrit un nombre réel sur un papier). Tous les plis sont transmis à un commissaire priseur. L'acheteur ayant soumis l'offre la plus haute obtient l'objet et paye le prix qu'il a soumis (si les deux acheteurs font la même offre, chacun obtient l'objet avec probabilité 1/2). L'acheteur $i \in \{1, 2\}$ attribue au bien la valeur $v_i \in \mathbb{R}$. S'il obtient l'objet en payant le prix p son utilité est de $v_i - p$. Sinon, son utilité est de 0. On notera p_i l'offre soumise par l'acheteur i.

Remarque : l'ensemble d'actions d'un joueur est ici $\mathbb{R}$

a) Sans justifier, dire si les fonctions de paiements sont continues ou non.

b) Définir la notion de stratégie dominante. L'acheteur 1 a-t-il une stratégie dominante ?

c) Montrer que faire une offre $p_i > v_i$ est une stratégie faiblement dominée. Est-ce une stratégie strictement dominée ?

d) Montrer qu'il n'y a pas d'équilibre de Nash tel que $p_1 \neq p_2$

e) On suppose $v_1 = v_2 = v$. Montrer que le seul équilibre de Nash est donné par $p_1 = p_2 = v$. Déterminer les utilités associées.

f) On suppose $v_1 > v_2$. Montrer qu'il n'y a aucun équilibre de Nash.