Université Paris-Dauphine L3 MIDO, Mars 2010

Partiel de théorie des jeux

Durée 2h. Tous documents et appareils électroniques interdits. **Il faut tourner la page.**

Les exercices sont indépendants et peuvent être faits dans n'importe quel ordre. Le barême indiqué est très approximatif. Sauf mention contraire, les réponses doivent être justifiées.

Exercice 1 (7,5pts) [Les lettres entre parenthèses sont des suggestions de notations]

Basile propose à Anouk d'aller à la chasse. Si elle refuse (N), ils ont tous les deux un paiement de 0. Si elle accepte (A), ils partent à la chasse. En théorie, ils chassent le sanglier, mais ils se séparent pour cela. Chacun peut donc en fait soit chasser vraiment le sanglier (S), soit aller chasser le lapin (L). Ils choisissent ce qu'ils font de manière simultanée et indépendante.

Si les deux décident de chasser le lapin, ils ont chacun un paiement de 1. Si l'un d'entre eux décide de chasser le lapin et l'autre de chasser le sanglier, celui qui chasse le lapin a un paiement de 1, et l'autre un paiement de -1. Si les deux décident de chasser le sanglier, ils réussissent (R) avec probabilité $1/2$ et échouent (E) avec probabilité $1/2$. S'ils réussissent, ils ont chacun un paiement de 5, s'ils échouent, ils ont chacun un paiement de -1.

1- (2,5pts) Modéliser cette situation comme un jeu sous forme extensive.

2-(1pt) Combien Anouk a-t-elle de stratégies ? de stratégies réduites ? Mêmes questions pour Basile.

3- (2pts) Mettre le jeu sous forme normale.

4-(2pts) Déterminer tous les équilibres mixtes du jeu.

Exercice 2 (3pts) (il suffit de répondre à la question 2).

1- Donner un exemple de jeu fini à deux joueurs et <u>à somme nulle</u> tel qu'aucune stratégie pure ne soit strictement dominée et que le jeu ait un équilibre pur.

2- Même question, mais en demandant en plus que le joueur 1 n'ait pas deux paiements identiques (formellement : pour tous profils de stratégies pures s et t, si $s \neq t$ alors $g(s) \neq g(t)$, où g est la fonction de paiement du joueur 1). On pourra chercher un exemple où chaque joueur à trois stratégies.

Exercice 3 (3pts). On considère le jeu à deux joueurs où le joueur 1 choisit $x \in [0,1]$, le joueur 2 choisit $y \in [0,1]$, et les paiements sont les suivants : si $(x,y) \neq (1,1)$, $u_1(x,y) = x$ et $u_2(x,y) = y$; de plus, $u_1(1,1) = u_2(1,1) = 0$. On ne considère que des stratégies pures.

1-(1pt) Quelles stratégies du joueur 1 sont strictement dominées ?

2-(2pts) Si le jeu a des équilibres de Nash, les déterminer (en justifiant). Si le jeu n'a pas d'équilibres, le prouver.

Exercice 4 (7pts) Soit $G = \{I, (S_i)_{i\in I}, (u_i)_{i\in I}\}$ un jeu bimatriciel. Soit s_1 une stratégie pure du joueur 1. On dit que s_1 n'est "jamais meilleure réponse" si :

$$\forall \sigma_2 \in \Delta(S_2), \exists \sigma_1 \in S_1, u_1(t_1, \sigma_2) > u_1(s_1, \sigma_2).$$

Partie I.

1. (1pt) Donner la définition de "s_1 est strictement dominée (par une stratégie mixte)".

2. (1pt) Montrer que si s_1 est strictement dominée, alors elle n'est jamais meilleure réponse.

3. (1pt) Est-il vrai qu'une stratégie faiblement dominée n'est jamais meilleure réponse ? Si oui, le prouver. Sinon, donner un contre-exemple.

Partie II.

On veut prouver une réciproque du I.2. Pour cela, on fixe une stratégie $s_1 \in S_1$ qui n'est jamais meilleure réponse et l'on considère le jeu auxiliaire Γ défini ainsi : Γ est un jeu à deux joueurs et à somme nulle ; les joueurs s'appellent joueur I et joueur II ; l'ensemble de stratégies pures du joueur I est S_1, celui du joueur II est S_2 (les ensembles de stratégies pures sont donc les mêmes que dans G) ; pour tout $(t_1, t_2) \in S_1 \times S_2$, le paiement du joueur I est $g(t_1, t_2) = u_1(t_1, t_2) - u_1(s_1, t_2)$.

4. (1pt) Soit $w \in \mathbb{R}$. Donner la définition de "dans le jeu Γ, le joueur II peut garantir w".

5. (1pt) Montrer que $\min_{\sigma_2 \in \Delta(S_2)} \max_{\sigma_1 \in \Delta(S_1)} g(\sigma_1, \sigma_2) > 0$ (on admet qu'il s'agit bien d'un min-max et pas d'un infsup).

6. (2pts) Montrer que dans le jeu G, la stratégie s_1 est strictement dominée.