Interrogation (2) du 21 mars 2002
Correction

1. Le triplet
$$(Y_3, Y_1, Y_2) = (X_1, X_1 - X_2, X_1 + X_2 + X_3)$$
a comme transformation inverse
$$(X_1, X_2, X_3) = (Y_3, Y_3 - Y_1, Y_1 + Y_2 - 2Y_3)$$
et comme jacobien
$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 1$$
La densité du triplet (Y_3, Y_1, Y_2) est donc
$$\begin{aligned} f(y_1, y_2, y_3) &= \exp(-y_3 - y_3 + y_1 - y_1 - y_2 + 2y_3)\, \mathbb{I}_{y_3 > y_1} \mathbb{I}_{y_3 > 0} \mathbb{I}_{y_1 + y_2 > 2y_3} \\ &= \exp(-y_2)\, \mathbb{I}_{y_3 > y_1} \mathbb{I}_{y_3 > 0} \mathbb{I}_{y_1 + y_2 > 2y_3} \\ &= \exp(-y_2)\, \mathbb{I}_{\max(0, y_1) < y_3 < (y_1 + y_2)/2} \end{aligned}$$
et la loi jointe du couple (Y_1, Y_2) a comme densité
$$\begin{aligned} e^{-y_2} \int_{\max(0,y_1)}^{(y_1+y_2)/2} dy_3\, \mathbb{I}_{y_1 + y_2 > 2\max(0,y_1)} &= e^{-y_2} \left[\frac{y_1 + y_2}{2} - \max(0, y_1) \right] \mathbb{I}_{y_1 + y_2 > 2\max(0,y_1)} \\ &= e^{-y_2} \begin{cases} \frac{y_2 - y_1}{2}\, \mathbb{I}_{y_2 > y_1} & \text{si } y_1 > 0 \\ \frac{y_1 + y_2}{2}\, \mathbb{I}_{y_2 > -y_1} & \text{sinon} \end{cases} \\ &= e^{-y_2}\, \frac{y_2 - |y_1|}{2}\, \mathbb{I}_{y_2 > |y_1|} \end{aligned}$$

2. La loi marginale de Y_2 est donc
$$\begin{aligned} e^{-y_2}\, \mathbb{I}_{y_2 > 0} \left[\int_{-y_2}^{0} \frac{y_1 + y_2}{2} dy_1 + \int_0^{y_2} \frac{y_2 - y_1}{2} dy_1 \right] &= e^{-y_2}\, \mathbb{I}_{y_2 > 0} \int_0^{y_2} (y_2 - y_1) dy_1 \\ &= e^{-y_2} \mathbb{I}_{y_2 > 0} \left[\frac{-(y_2 - y_1)^2}{2} \right]_0^{y_2} \\ &= \frac{y_2^2}{2} e^{-y_2} \mathbb{I}_{y_2 > 0}\,, \end{aligned}$$

soit une loi Gamma $\mathcal{G}a(3,1)$.

3. On a $\mathbb{E}[Y_1] = \mathbb{E}[X_1] - \mathbb{E}[X_2] = 0$ (ou par symétrie), $\mathbb{E}[Y_2] = 3$ et

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(Y_1, Y_2) &= \mathbb{E}[Y_1 Y_2] \\
&= \int_0^\infty \int_{-y_2}^{y_2} y_1 y_2 e^{-y_2} \frac{y_2 - |y_1|}{2} dy_1 dy_2 \\
&= \int_0^\infty y_2 e^{-y_2} \int_{-y_2}^{y_2} y_1 \frac{y_2 - |y_1|}{2} dy_1 \, dy_2 = 0
\end{aligned}$$

car $y_1(y_2 - |y_1|)$ est impaire. Donc Y_1 et Y_2 ne sont pas correlés, mais cela n'implique pas que Y_1 et Y_2 soient indépendants.

4. Y_1 et Y_2 ne sont pas indépendants [cf. lemme de factorisation].

5. La densité de la loi du couple (Z, Y_2) est donnée par

$$f(z, y_2) = e^{-y_2} \frac{y_2 - |zy_2|}{2} \mathbb{I}_{|zy_2|<y_2} \mathbb{I}_{y_2>0} \, y_2 = e^{-y_2} y_2^2 \frac{1 - |z|}{2} \mathbb{I}_{|z|<1} \mathbb{I}_{y_2>0} \,,$$

car le jacobien est y_2. La densité de Z est donc

$$f(z) = (1 - |z|) \, \mathbb{I}_{|z|<1}$$

et Y_2 et Z sont indépendants.

6. Par symétrie, $\mathbb{E}[Z] = 0$ et $\mathrm{Cov}(Y_1, Z) = \mathbb{E}[Z^2 Y_2] = \mathbb{E}[Z^2]\mathbb{E}[Y_2]$ car ils sont indépendants. On a $\mathbb{E}[Y_2] = 3$ et

$$\mathbb{E}[Z^2] = 2 \int_0^1 z^2 (1 - z) dz = 2 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{6}$$

donc

$$\mathrm{Cov}(Y_1, Z) = \frac{1}{2}$$