Université Paris Dauphine
U.F.R. Mathématiques de la Décision
MD2 - Statistique

Année 2003-2004

Feuille de Travaux Dirigés 2

Couples de variables aléatoires

Exercice 1

1 Soit la fonction f définie par :

$$f(x,y) = \begin{cases} k & \text{si} \quad x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 4 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} .$$

Peut-on choisir le réel k de telle sorte que f soit la densité d'un couple de variables aléatoires ?

2 Même question si

$$f(x,y) = \begin{cases} k & \text{si} \quad |x| + |y| \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} .$$

3 Même question si

$$f(x,y) = \begin{cases} k & \text{si} \quad x > 1, y > 0, xy < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} .$$

Exercice 2

Deux transistors sont montés sur le même circuit imprimé. Leurs durées de vie est un couple de variables aléatoires (X, Y) dont la densité est donnée par :

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} 6\exp(-2x - 3y) & \text{si} \quad 0 \leq x, 0 \leq y \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} .$$

1 Déterminer les lois marginales de X et de Y.

2 Calculer $\mathbb{P}(X > Y)$.

Exercice 3
Soit la fonction f définie par :

$$f(x,y) = \begin{cases} k\left(y^2 - x^2 + 1\right) & \text{si} \quad 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} .$$

Pour quelle valeur de k, f peut-elle représenter la densité d'un couple de variables aléatoires (X,Y) ?

Exercice 4
Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires admettant pour densité

$$f(x,y) = \begin{cases} k & \text{si} \quad |x| + |y| \le 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} .$$

1 Déterminer k ainsi que les lois marginales de X et de Y.

2 Déterminer $\mathrm{cov}(X,Y)$ et étudier l'indépendance de X et Y.

Exercice 5
Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de même loi continue uniforme sur $]0,1]$.

1 Trouver la densité de probabilité des variables aléatoires $U = \log(X)$ et $V = -\log(Y)$.

2 On admet que U et V sont indépendantes. Montrer que la variable aléatoire $Z = \log\left(\frac{X}{Y}\right)$ admet une densité de probabilité f_Z définie par
$f_Z(x) = 1/2\exp(-|x|)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 6
Déterminer la loi de la moyenne de 2 puis de 3 variables aléatoires indépendantes de loi continue uniforme sur $[0,1]$.

Exercice 7
Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes et de même loi continue uniforme sur $[0,1]$.

1 Calculer la densité de probabilité de $T = \inf(X,Y)$ et de $Z = \sup(X,Y)$.

2 Calculer l'espérance mathématique de Z et de T.

3 Calculer le coefficient de corrélation linéaire entre Z et T.

Exercice 8
Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires admettant pour densité de probabilité $f_{(X,Y)}(x, y) = \exp(-y)1_{[x,+\infty[}(y)1_{\mathbb{R}^+}(x)$.

1 Vérifier que $f_{(X,Y)}$ est bien une densité de probabilité.

2 Déterminer les lois marginales de X et de Y.

3 Calculer $\mathbb{P}(X \leq 1 | Y > 2)$.

Exercice 9
Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires continues dont la densité de probabilité est donnée par :

$$f_{(X,Y)}(x, y) = \begin{cases} x \exp[-x(1+y)] & \text{si} \quad 0 < x, 0 < y \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} .$$

1 Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

2 Déterminer la loi conditionnelle de X sachant $Y = y$.

3 Calculer $\mathbb{E}(X|Y = y)$. En déduire $\mathbb{E}(X|Y)$, puis $\mathbb{E}(X)$.

Exercice 10
Soit X une variable aléatoire admettant pour loi conditionnelle lorsque $Y = y$, la loi de densité : $y^2 x \exp(-yx)1_{\mathbb{R}^+}(x)$. La variable aléatoire Y admet pour densité $f_Y(y) = 1/(y^2)1_{]1,+\infty[}(y)$. Calculer la loi conditionnelle de Y sachant $X = x$, ainsi que l'espérance conditionnelle $\mathbb{E}(Y|X)$.

Exercice 11
Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 1$. On considère les variables U et V définies par $U = X + Y$ et $V = X/Y$.

1 Déterminer la loi du couple de variables aléatoires (U, V). Les variables U et V sont-elles indépendantes ?

2 Calculer $\mathbb{E}(U)$ et $\mathbb{V}(U)$. Que peut-on dire des moments de V ?

Exercice 12

On considère un couple de variables aléatoires (X, Y) de densité $f_{(X,Y)}$ donnée par :

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} 1/2 & \text{si} \quad -1 < x < 0, 0 < y < 1 \\ 1 & \text{si} \quad 0 < x, 0 < y, x + y < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} .$$

1 Calculer les densités marginales de X et de Y.

2 Déterminer la densité conditionnelle de Y sachant $X = x$.

3 On pose $U = X - Y$ et $V = X + Y$. Déterminer la loi du couple (U, V).

Exercice 13

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires de densité $f_{(X,Y)}$ donnée par $f_{(X,Y)}(x,y) = 1/(2x)1_D(x,y)$ où $D = \{(x,y)|0 < y \leq x, 0 < y \leq 1/x\}$. On pose $S = \sqrt{XY}$ et $T = \sqrt{Y/X}$.

1 Donner une représentation graphique de D.

2 Calculer la loi du couple (S, T).

3 Les variables aléatoires S et T sont-elles indépendantes ?

4 Calculer $\mathbb{E}(Y)$.

Exercice 14

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires de densité $f_{(X,Y)}$ donnée par $f_{(X,Y)}(x,y) = 1/(x^2y^2)1_{[1,+\infty[^2}(x,y)$. On pose $U = XY$ et $V = X/Y$.

1 Calculer la loi du couple (U, V).

2 Calculer les lois conditionnelles de U sachant $V = v$ et de V sachant $U = u$.

3 Calculer les espérances conditionnelles si elles existent.

Exercice 15
Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires de densité $f_{(X,Y)}$ donnée par :

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} kx\exp(-x-y) & \text{si} \quad |y| \leq x/2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1 Calculer les densités marginales de X et de Y.

2 Calculer la valeur de k.

3 Calculer $\mathbb{E}(X+Y)$.

Exercice 16
Robert est marin sur un cargo. Le cargo arrive au port au hasard de manière uniforme entre le premier janvier à 6 heures du matin et le 14 janvier à minuit. Il reste 48 heures à quai pour décharger et repart.
Jean, son frère, est marin sur un bateau de pêche. Il arrive lui entre le premier janvier à 6 heures et le 7 janvier à 12 heures. Il reste 12 heures puis repart pour un mois. Les deux frères souhaiteraient se rencontrer.

1 Construire une représentation graphique de l'ensemble des situations possibles. Décrire le sous-ensemble des situations où ils se rencontrent.

2 Décrire de même les événements suivants :
a) Robert est arrivé le premier et les deux frères se sont rencontrés.
b) Jean est arrivé le premier et la rencontre a eu lieu.

3 Mettre une probabilité sur cet espace et trouver la probabilité des trois événements ci-dessus.