Université Paris Dauphine Année 2003-2004
U.F.R. Mathématiques de la Décision
MD2 - Statistique

Feuille de Travaux Dirigés 3

Loi Normale - Loi Gamma - Loi Bêta

Exercice 1
Soit $\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix}$ où a est un réel.

1 Donner une condition nécessaire et suffisante sur le réel a pour que Σ soit la matrice de variance-covariance d'un vecteur gaussien.

2 On suppose de plus que ce vecteur gaussien est centré. Donner l'expression analytique de sa densité de probabilité.

Exercice 2
Soit (X, Y) un vecteur gaussien de moyenne $(1, -1)$ et de matrice de variance-covariance $\Sigma = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$.

1 Donner le coefficient de corrélation linéaire de X et Y.

2 Calculer $\mathbb{P}(X < 0)$.

3 Calculer $\mathbb{P}(X - Y < 0)$.

4 Déterminer la valeur de α telle que $\mathbb{P}(|X + Y| \leq \alpha) \geq 0.9$.

Exercice 3
Soient (X, Y) deux variables aléatoires gaussiennes indépendantes de même loi $\mathcal{N}(0, 1)$. On pose $U = X/Y$. Montrer que U suit une loi de Cauchy, i.e. une loi dont la densité de probabilité est de la forme $f(u) = \dfrac{1}{\pi\,(u^2 + 1)}$.

Exercice 4
Soient (X, Y) un couple de variables aléatoires tel que la loi marginale de X est une loi uniforme sur $[0,1]$ et la loi conditionnelle de Y sachant $X = x$ est une loi $\mathcal{N}(x, x^2)$.

1 Calculer $\mathbb{E}(Y)$, $\mathbb{V}(Y)$ et $\text{cov}(X, Y)$.
Indication : utiliser les variables $\mathbb{E}(Y|X)$ et $\mathbb{V}(Y|X)$.

2 Montrer qure X et Y/X sont indépendantes.

Exercice 5
1 Soit (X, Y) un vecteur gaussien. Montrer que $X + Y$ est une variable aléatoire gaussienne dont on précisera les paramètres en fonction des caractéristiques du vecteur aléatoire (X, Y).

2 On suppose maintenant que X suit une loi $\mathcal{N}(0,1)$.
On pose $Y = \left\{ \begin{array}{ccc} X & \text{si} & |X| \geq a \\ -X & \text{si} & |X| < a \end{array} \right.$.
Montrer que Y suit une loi $\mathcal{N}(0,1)$. Montrer que $X + Y$ n'est pas gaussienne. En déduire que le vecteur (X, Y) n'est pas gaussien.

Exercice 6
1 Soit X un vecteur gaussien de loi $\mathcal{N}_2(\mu, \Sigma)$ où μ est une vecteur de $\mathbb{R}^2$ et Σ une matrice carrée d'ordre 2 symétrique définie positive. Soit A une matrice carrée d'ordre 2 inversible, on pose $Y = AX$. Montrer que Y est un vecteur gaussien dont on donnera la moyenne et la matrice de variance-covariance.

2 Soit U une variable aléatoire suivant une loi $\mathcal{N}(0,1)$ et E une variable aléatoire indépendante de U de loi $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$. On pose $V = aU + E$ où a est un réel fixé. Déterminer l'espérance conditionnelle $\mathbb{E}(U|V)$.

Exercice 7
Soient X et Y les notes obtenues par un étudiant au contrôle continu et à l'examen de Probabilités. Des études de Statistique Inférentielle ont montré que les distributions de ces notes sont approximativement gaussiennes avec $\mathbb{E}(X) = 9$, $\sigma(X) = 3$, $\mathbb{E}(Y) = 10$, $\sigma(Y) = 2$ et $\text{corr}(X, Y) = 0.6$. On suppose de plus que le vecteur (X, Y) est gaussien.

1 Donner la loi de Y sachant que $X = x$.

2 Déterminer la probabilité qu'un étudiant ayant 9 en contrôle continu ait plus de 10 à l'examen.

3 Montrer que la note moyenne d'examen d'un étudiant ayant une note x au contrôle continu est une fonction affine de x.

4 Donner la note moyenne d'examen que peut espérer un étudiant ayant obtenu 10 au contrôle continu.

Exercice 8
Soit (X, Y) un vecteur gaussien de densité :

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(x^2 - 2xy\rho + y^2\right)\right].$$

Montrer que le coefficient de corrélation linéaire de X et Y est ρ et que le coefficient de corrélation linéaire de X^2 et Y^2 est ρ^2.

Exercice 9
Soit (X, M) un couple de variables aléatoires tel que la densité conditionnelle de X sachant $M = m$ est une loi gaussienne de moyenne m et de variance σ^2 et la loi de M est une loi gaussienne de moyenne m_0 et de variance γ^2. Les constantes m_0, $\sigma > 0$ et $\gamma > 0$ sont données.

1 Montrer que le vecteur (X, M) est gaussien.

2 Calculer $\mathbb{E}(M|X)$.
Indication : remarquer que $\mathbb{E}(M|X)$ est une fonction affine de X.

3 Donner la loi conditionnelle de M sachant $X = x$, ainsi que la loi de X.

Exercice 10
1 On pose $\Gamma(a) = \displaystyle\int_0^\infty x^{a-1}\exp(-x)dx$.

1. Montrer que $\Gamma(a)$ est définie si et seulement si $a > 0$.
2. Montrer que pour $a > 0$, $\Gamma(a+1) = a\Gamma(a)$. En déduire $\Gamma(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
3. Une variable aléatoire X suit une loi Gamma de paramètres $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ si elle admet pour densité :

$$f(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1}\exp(-\beta x) 1_{\mathbb{R}_+^*}(x).$$

Vérifier par un changement de variables que f est une densité de probabilité. Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.

2 Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de lois respectivement $\mathcal{G}(\alpha_1, \beta)$ et $\mathcal{G}(\alpha_2, \beta)$. On pose $S = X + Y$ et $T = X/(X+Y)$.

1. Déterminer la loi du couple (S, T).
2. On pose $B(a,b) = \displaystyle\int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1}dt$. Montrer que $B(a,b) = \dfrac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$.
3. Une variable aléatoire V suit une loi Bêta de paramètres $\alpha_1 > 0$ et $\alpha_2 > 0$ si elle admet pour densité :
$$f(v) = \frac{1}{B(\alpha_1, \alpha_2)} v^{\alpha_1 - 1}(1-v)^{\alpha_2 - 1} 1_{[0,1]}(v).$$
Calculer $\mathbb{E}(V)$ et $\mathbb{V}(V)$.
4. Montrer que S et T sont des variables indépendantes et préciser leurs lois respectives.
5. Déterminer la loi de X/Y et calculer son espérance si elle existe.

3 Somme de variables exponentielles indépendantes.

1. Montrer que la loi exponentielle de paramètre λ est un cas particulier de loi Gamma.
2. Soient $X_1, \ldots, X_n$, n variables aléatoires indépendantes de même loi exponentielle de paramètre λ. Déterminer la loi de $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$.

4 Distribution du chi-deux.

1. Soit X une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(0,1)$. On pose $U = X^2$. Déterminer la densité de probabilité de U et l'identifier comme la densité d'une loi Gamma dont on précisera les paramètres. En déduire que $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.
2. Soient $X_1, \ldots, X_n$ n variables aléatoires indépendantes de même loi$\mathcal{N}(0,1)$. Déterminer la loi de $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i^2$. Donner sa densité de probabilité, son espérance et sa variance. Cette loi porte le nom de loi du chi-deux à n degrés de libertés. On la note $\chi^2(n)$.
3. Soient V et W deux variables aléatoires indépendantes de lois respectives $\chi^2(n)$ et $\chi^2(m)$. Déterminer la loi de $V + W$.