Université Paris Dauphine
U.F.R. Mathématiques de la Décision
MD2 - Statistique Année 2003-2004

Feuille de Travaux Dirigés 4

Sommes de variables aléatoires indépendantes Convergences

Exercice 1
Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de même loi exponentielle de paramètre λ strictement positif.

1 Déterminer la loi de $X+Y$.

2 On suppose que $\lambda = 1$. Déterminer la loi de $W = [X+Y]$ où $[x]$ désigne la partie entière de x.

3 On suppose toujours X et Y indépendantes suivant des lois exponentielles de paramètres distincts λ et μ strictement positifs. Déterminer la loi de $X+Y$.

Exercice 2
Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de même loi ayant pour densité la fonction $f(x) = 1/x^2 1_{[1,+\infty[}(x)$. Déterminer la loi de $Z = X - Y$.

Exercice 3
1 Soient X_1, X_2 et X_3 trois variables aléatoires indépendantes de même loi de probabilité continue uniforme sur $[0,1]$. On pose $T_2 = (X_1 + X_2)/2$ et $T_3 = (X_1 + X_2 + X_3)/3$.

1.1 Déterminer la densité de $S_2 = X_1 + X_2$ puis celle de $S_3 = X_1 + X_2 + X_3$. En déduire les densités de T_2 et de T_3. Tracer le graphe des densités de T_2 et de T_3.

1.2 Calculer $\mathbb{V}(X_1)$, $\mathbb{V}(T_2)$, $\mathbb{V}(T_3)$ et le coefficient de corrélation linéaire entre T_2 et T_3.

2 Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes une loi uniforme sur $[0,1]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = X_1 + \ldots + X_n$. On admet que S_n a comme densité la fonction f_n définie par :

$$f_n(x) = \begin{cases} 1/(n-1)! \displaystyle\sum_{k=0}^{[x]} C_n^k (-1)^k (x-k)^{n-1} & \text{si} \quad 0 \leq x \leq n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où $[x]$ désigne la partie entière de x.

2.1 Déterminer la fonction de répartition de S_n.

2.2 Calculer l'espérance et la variance de S_n.

Exercice 4

Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes de même loi $\mathcal{N}(0,1)$. On pose $U = |1/n \sum_{i=1}^n X_i|$ et $V = 1/n \sum_{i=1}^n |X_i|$. Comparer $\mathbb{E}(U)$ et $\mathbb{E}(V)$ et les calculer.

Exercice 5

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$, équidistribuées ayant une espérance μ et une variance σ^2. Soit N une variable aléatoire indépendante des X_i à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ ayant une espérance μ_1 et une variance σ_1^2. On pose $S_N = \sum_{i=1}^N X_i$. Calculer $\mathbb{E}(S_N)$ et $\mathbb{V}(S_N)$.

Exercice 6

On définit la fonction réelle f_n par $f_n(x) = n/\left(\pi\left(1+n^2x^2\right)\right)$.

1 Démontrer que f_n est la densité d'une variable aléatoire X_n. Que peut-on dire de $\mathbb{E}(X_n)$ et $\mathbb{V}(X_n)$?

2 Montrer que X_n converge en probabilité vers 0 lorsque $n \to \infty$.

Exercice 7

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi $\mathcal{B}(n,p)$. Montrer que $\dfrac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$ converge en loi vers une variable gaussienne $\mathcal{N}(0,1)$ lorsque $n \to \infty$.

Exercice 8
Soit n un entier naturel strictement positif, X_n une variable aléatoire entière de loi $\mathcal{B}(n, 1/3)$. On définit la variable aléatoire $Y_n = X_n/n$.

1 Déterminer l'espérance, notée μ_n, et la variance de Y_n.

2 Pour quelles valeurs de n a-t-on $\mathbb{P}\left(|Y_n - \mu_n| < 10^{-2}\right) \geq 0.98$.
On raisonnera en utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebichev, puis le théorème central limite, et on comparera les deux méthodes.

Exercice 9
Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la même loi de Bernoulli de paramètre p, $0<p<1$. Pour $n \in \mathcal{N}^*$, on considère la variable aléatoire $Y_n = X_n + X_{n+1}$.

1 Déterminer la loi de Y_n et calculer $\mathbb{E}(Y_n)$ et $\mathbb{V}(Y_n)$.

2 On note $T_n = (Y_1 + \cdots + Y_n)/n$. Calculer $\mathbb{E}(T_n)$ et $\mathbb{V}(T_n)$.

3 Montrer que la suite (T_n) converge en probabilité vers la variable aléatoire constante égale à $2p$.

Exercice 10
Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre λ strictement positif. Montrer que $\dfrac{X-\lambda}{\sqrt{\lambda}}$ converge en loi vers une variable gaussienne $\mathcal{N}(0,1)$ lorsque $\lambda \to \infty$.

Exercice 11
Soit X_n une variable aléatoire entière prenant ses valeurs dans $\{1, \ldots, n\}$. On suppose que, pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, $\mathbb{P}(X_n = k) = ak$.

1 Déterminer la valeur de la constante a. Calculer $\mathbb{E}(X_n)$ et $\mathbb{V}(X_n)$.

2 Calculer les limites, lorsque $n \to \infty$, de $\mathbb{E}(X_n/n)$ et $\mathbb{V}(X_n/n)$. Vers quelle variable X_n/n converge-t-elle en loi ?

Exercice 12
Soit X_n une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre p/n, pour $0 < p < n$. Quid de la convergence en loi de X_n/n ?

Exercice 13

Soit X_n une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi de Poisson $\mathcal{P}(1)$. Quelle est la loi de $X_1 + \ldots + X_n$? Que vaut $\mathbb{P}(X_1 + \ldots + X_n \leq n)$? Utiliser le théorème central limite pour montrer que :

$$\lim_{n \to +\infty} \exp(-n) \sum_{k=1}^{n} \frac{n^k}{k!} = 1/2.$$

Exercice 14

Une suite de variables aléatoires X_n converge en loi vers une variable aléatoire X, et une autre suite Y_n indépendante des X_n converge en probabilité vers la variable certaine égale à $a \in \mathbb{R}$.

1 On pose, pour tout entier n, $Z_n = X_n + Y_n$. Quelle est la limite en loi de la suite Z_n ?

2 Soit Y_n une variable aléatoire dont la loi est définie par $\mathbb{P}(Y_n = 0) = 1 - 1/n$ et $\mathbb{P}(Y_n = 1) = 1/n$. Montrer que la suite Y_n converge en probabilité vers 0. Construire une suite de variables aléatoires Z_n possédant un moment d'ordre 2 et qui converge en loi vers la variable aléatoire Z normale centrée réduite, sans que la variance de Z_n tende vers 1.

Exercice 15

On considère une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n \geq 1}$ telles que la loi de X_n est exponentielle de paramètre $\frac{1}{n}$ et on pose $Y_n = X_n - [X_n]$, où $[x]$ désigne la partie entière de x. Montrer que la suite $(Y_n)_{n \geq 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire Y dont on précisera la loi.

Exercice 16

1 Une compagnie d'assurance assure 500 navires pour une somme de 5 millions chacun. Chaque navire a chaque année une probabilité égale à 0.001 de subir un sinistre majeur couvert par l'assurance. Soit X le nombre de navires perdus en une année. Donner la loi de X, son espérance et sa variance. Quelles réserves doit posséder la compagnie d'assurance pour être sûre de pouvoir payer les indemnités avec une probabilité égale à 0.999 à la fin de chaque année ? (On proposera différentes méthodes pour le calcul et on comparera les résultats).

2 Une seconde compagnie d'assurance assure également 500 navires dans les mêmes conditions que la précédente. Les compagnies ont-elles intérêt à fusionner ?