Université Paris Dauphine Année 2002-2003
U.F.R. Mathématiques de la Décision
MD2 - Statistique

Feuille de Travaux Dirigés 5

Estimation ponctuelle et par intervalles

Exercice 1 On considère une variable aléatoire X dont la loi dépend de deux paramètres p_1 et p_2 de la manière suivante :

$$\mathbb{P}(X=0)=1-p_1-p_2, \quad \mathbb{P}(X=1)=p_1, \quad \mathbb{P}(X=2)=p_2.$$

1 Indiquer les conditions que doivent vérifier p_1 et p_2 pour que le support de la loi probabilité précédente soit égal à $\{0,1,2\}$. Calculer $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}(X^2)$ et $\mathbb{V}(X)$.

2 Soit $X_1,\ldots,X_n$ un échantillon iid comme X. Déterminer les estimateurs L_1 et L_2 de p_1 et p_2 par la méthode des moments. Montrer que ces estimateurs sont sans biais et convergents presque sûrement.

3 Pour tout $j=0,1,2$, on désigne par N_j le nombre de X_i égaux à j. Écrire la vraisemblance de l'échantillon en fonction de p_1, p_2, n_0, n_1 et n_2. Déterminer les estimateurs Z_1 et Z_2 de p_1 et p_2 par la méthode du maximum de vraisemblance.

4 Montrer que $L_1=Z_1$ et $L_2=Z_2$.

5 Un échantillon de taille $n=100$ de X a donné les observations suivantes $n_0=20$, $n_1=50$ et $n_2=30$. A quelles estimations de p_1 et p_2 conduisent les estimateurs L_1 et L_2.

Exercice 2 Soit X une variable aléatoire admettant pour densité de probabilité la fonction f_X de la forme :

$$f_X(x)=\begin{cases} a & \text{si} \quad 0\le x\le 1/2 \\ b & \text{si} \quad 1/2\le x\le 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

1 Indiquer la relation que doivent satisfaire a et b pour que f soit bien une densité de probabilité et pour que le support de cette loi soit égal à $[0,1]$. On exprimera b en fonction de a, paramètre que l'on se propose d'estimer.

2 Calculer $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}(X^2)$ et $\mathbb{V}(X)$ en fonction de a.

3 Soit $X_1, \ldots, X_n$ un échantillon iid comme X. Déterminer l'estimateur L_n de a par la méthode des moments. Quelles sont les propriétés de L_n.

4 On désigne par N_0 le nombre des variables aléatoires X_i appartenant à l'intervalle $[0, 1/2[$. Déterminer l'estimateur Z_n de a par la méthode du maximum de vraisemblance.

5 Comparer L_n et Z_n.

Exercice 3 Soit $X_1, \ldots, X_n$ un échantillon iid comme X. Déterminer les estimateurs du maximum de vraisemblance dans les cas suivants :

1 X suit une loi de Bernoulli de paramètre p.

2 X suit une loi normale de moyenne μ et de variance σ^2.

3 X suit une loi exponentielle de paramètre λ.

Exercice 4 Soit $X_1, \ldots, X_n$ un échantillon iid comme X de densité :

$$f_X(x) = (1+\theta)x^\theta 1_{[0,1]}(x).$$

1 Quelles sont les valeurs possibles de θ ? Trouver une statistique exhaustive pour le paramètre θ.

2 Déterminer l'estimateur Z_n de θ par la méthode du maximum de vraisemblance.

Exercice 5 Le responsable d'une exposition s'intéresse au rythme d'arrivée des groupes de visiteurs à partir des observations faites au cours des premières journées. Il constate que le temps séparant l'arrivée de deux groupes successifs peut être assimilé à une variable aléatoire X de loi uniforme sur $[0, r]$ et que les temps inter-arrivées sont des variables aléatoires indépendantes. Pour l'organisation ultérieure des caisses réservées aux entrée des groupes, il souhaite estimer avec précision le paramètre θ, ayant à sa disposition un échantillon de taille n de ces variables inter-arrivées.

1 Calculer l'espérance mathèmatique et la variance de X.

2 Déterminer l'estimateur L_n de r par la méthode des moments. Montrer que L_n est sans biais et convergent presque sûrement.

3 Déterminer l'estimateur Z_n de r par la méthode du maximum de vraisemblance.

4 À partir de la statistique Z_n, proposer un estimateur W_n non biaisé de r.

5 Montrer que W_n est convergent presque sûrement.

6 Comparer L_n et W_n.

Exercice 6 Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre λ ($\lambda > 0$) et $X_1, \ldots, X_n$ un échantillon iid comme X.

1 Déterminer une statistique exhaustive pour le paramètre λ.

2 Déterminer l'estimateur L_n de λ par la méthode des moments.

3 Détermniner l'estimateur Z_n de θ par la méthode du maximum de vraisemblance.

Exercice 7 Soit X une variable aléatoire gausienne de moyenne μ et de variance σ^2 et $X_1, \ldots, X_n$ un échantillon iid comme X.

1 On suppose que σ^2 est connue. Proposer un intervalle de confiance bilatéral symétrique de niveau 95% pour le paramètre μ.

2 On suppose que σ^2 est inconnue. Proposer un intervalle de confiance bilatéral symétrique de niveau 95% pour le paramètre μ et un intervalle de confiance bilatéral symétrique de niveau 95% pour le paramètre σ^2.

Exercice 8 Soit X une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre p avec $p \in]0,1[$ et $X_1, \ldots, X_n$ un échantillon iid comme X.

1 Déterminer l'information de Fisher apportée par X sur le paramètre p puis celle apportée par l'échantillon.

2 Montrer que $\overline{X_n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$ est une statistique exhaustive pour p. Montrer que $\overline{X_n}$ est un estimateur efficace pour le paramètre $\frac{1-p}{p}$.

3 Déterminer un estimateur de p par la méthode du maximum de vraisemblance.

4 Indiquer une méthode de construction d'un intervalle de confiance bilatéral symétrique de niveau asymptotiquement égal à 95% pour p. Application numérique : dans un échantillon de taille $n = 100$, on a observé $\overline{x_n} = 12.2$.