Statistique

Partiel du 4 avril 2001

Sans document (durée deux heures). Trois exercices indépendants.

Exercice 1

On donne la densité jointe du couple (X, Y)

$$f(x, y) = Cxy, \quad 0 < y < 1, \quad y < x < 1\,.$$

1. Donner la valeur de la constante C.

2. Donner la densité marginale de Y et l'espérance conditionnelle de X sachant $Y = y$.

3. Trouver la probabilité $P(X < 2Y)$.

4. Trouver la loi de la variable $Z = X/Y$.

Exercice 2

Soient X et Y des variables aléatoires de moyennes et de variances finies.

1. `[Question de cours:Théorème 1.12]` Rappeler, sans la démontrer, l'inégalité reliant $\mathrm{cov}(X, Y)^2$ à

$$\mathrm{var}(X) \quad \text{et} \quad \mathrm{var}(Y).$$

2. En déduire que, si les variances de X et Y sont finies, la variance de $X + Y$ est aussi finie.

3. `[Question de cours:Théorème 1.8]` Rappeler, sans la démontrer, l'égalité reliant la variance $\mathrm{var}(Y)$ et les quantités

$$\mathbb{E}[\mathrm{var}(Y|X)] \quad \text{et} \quad \mathrm{var}(\mathbb{E}[Y|X])\,.$$

4. En supposant que $g(X)$ est une transformation de X de variance finie, montrer que

$$\mathbb{E}\left[(Y - g(X))^2 | X = x\right] = \{g(x) - \mathbb{E}[Y|X = x]\}^2 + \mathbb{E}\left[(Y - \mathbb{E}[Y|X])^2 | X = x\right]$$

en développant $(Y - \mathbb{E}[Y|X] + \mathbb{E}[Y|X] - g(X))^2$.

T.S.V.P/

5. En déduire que

$$\min_g \mathbb{E}\left[(Y - g(X))^2\right] = \mathbb{E}\left[\mathrm{var}(Y|X)\right]$$

où le minimum est pris sur toutes les transformations g de variance finie. (*Note:* On pourra utiliser la décomposition de la question 4.)

Exercice 3

1. On suppose à présent que X suit une loi exponentielle $\mathcal{E}xp(1)$ et que Y, conditionnellement à $X = x$, suit une loi normale $\mathcal{N}(1 - x, 1 + x^2)$.

1.1 Donner $\mathbb{E}[Y]$ et $\mathrm{var}(Y)$. (*Note:* On pourra utiliser la décomposition de la question **3.** de l'Exercice 2 ci-dessus.)

1.2 Calculer $\mathrm{Cov}(X, Y)$

2. On considère à présent que

$$(X, Y) \sim \mathcal{N}_2\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & \varrho \\ \varrho & 1 \end{bmatrix}\right)$$

(On rappelle que $\varrho = \mathrm{cov}(X, Y)$.)

2.1 `[Question de cours:Théorèmes 1.15/1.16]` Donner, sans démonstration, la loi marginale de X et la loi conditionnelle de Y sachant $X = x$.

2.2 `[Question de cours:Théorème 1.13]` Exprimer la covariance

$$\mathrm{cov}(X + aY, aX - Y)$$

en fonction de a, $\mathrm{var}(X) = 1$, $\mathrm{var}(Y) = 1$ et $\mathrm{cov}(X, Y) = \varrho$.

2.3 Montrer par un raisonnement sur les covariances que, quel que soit ϱ, $X + aY$ et $aX - Y$ sont indépendants pour deux valeurs de a **qu'on déterminera**. (*Note:* On appliquera, sans le démontrer, un résultat du cours pour passer de la non-corrélation à l'indépendance.)

2.4 Montrer que $\mathbb{E}[X^3] = 0$. En déduire que, quel que soit ϱ, X et XY sont non corrélés.