Statistique

Partiel du 27 mars 2002

Sans document (durée deux heures).
Calculatrice non programmable autorisée. Exercices indépendants.

Questionnaire à choix multiples (5 points)

(Une seule réponse valable par question à cocher sur cette feuille; un point par réponse positive, 0 pour une question sans réponse et moins un point par réponse négative)

1. Si X et Y sont indépendants, $\text{var}(2X + 3Y)$ vaut

   ◯ $2\text{var}(X) + 3\text{var}(Y)$ ◯ $4\text{var}(X) + 9\text{var}(Y) + 12\text{var}(XY)$
   ◯ $4\text{var}(X) + 9\text{var}(Y)$ ◯ $6\mathbb{E}[XY]$ ◯ $12\mathbb{E}[XY]$

2. Si $F(x_1, x_2)$ est la fonction de répartition et $f(x_1, x_2)$ est la fonction densité du couple (X_1, X_2), ces deux fonctions sont reliées par

   ◯ $f(x_1, x_2) = F(x_1, 1) + F(1, x_2)$ ◯ $f(x_1, x_2) = \frac{d}{dx_1}\left[\frac{dF(x_1,x_2)}{dx_2}\right]$
   ◯ $f(x_1, x_2) = \int\int F(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2$ ◯ $f(x_1, x_2) = \frac{dF(x_1,x_2)}{dx_1}\frac{dF(x_1,x_2)}{dx_2}$

3. La covariance $\text{cov}(X, Y)$ vérifie l'inégalité

   ◯ $\text{cov}(X, Y) \geq |\text{var}(X) - \text{var}(Y)|$ ◯ $|\text{cov}(X, Y)| \leq \min(\text{var}(X), \text{var}(Y))$
   ◯ $|\text{cov}(X, Y)| \leq \text{var}(X)\text{var}(Y)$ ◯ $2\text{cov}(X, Y) \leq \text{var}(X) + \text{var}(Y)$

4. La covariance $\text{cov}(X + Y, X - Y)$ est égale à

   ◯ $\text{cov}(X, Y)$ ◯ $\text{var}(X) - \text{var}(Y)$
   ◯ $\text{var}(X) + \text{var}(Y)$ ◯ $2(\text{var}(X) + \text{var}(Y))$

5. Si $X \sim \mathcal{N}_p(\mu, \Sigma)$, si B est une matrice (r, p), la loi de BX est

   ◯ $\mathcal{N}_r(B\mu, \Sigma)$ ◯ $\mathcal{N}_p(\mu B, \Sigma\, BB^T)$
   ◯ $\mathcal{N}_r(B\mu, \Sigma + BB^T)$ ◯ $\mathcal{N}_r(B\mu, B\Sigma B^T)$

Exercice 1

Soit la densité de probabilité ($\sigma > 0$)

$$f(x_1, x_2) = \frac{k}{(x_1^2 + (x_2 + \sigma)^2)^2} \, \mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}(x_2)$$

1. Montrer que $f(x_1, x_2)$ est bien intégrable.

2. Montrer que k est de la forme $\sigma^2 k'$, avec k' indépendant de σ.

3. Utiliser la décomposition

$$\int\int \frac{\mathbb{I}_{y_2>0}}{(y_1^2 + (y_2+1)^2)^2} dy_1 dy_2 = \int_0^\infty \frac{1}{(y_2+1)^2} \int_{-\infty}^\infty \frac{(y_2+1)^2}{(y_1^2 + (y_2+1)^2)^2} dy_1 \, dy_2$$

   et l'identité

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2} \, dx = \pi$$

   pour montrer que

$$\int\int \frac{\mathbb{I}_{y_2>0}}{(y_1^2 + (y_2+1)^2)^2} dy_1 dy_2 = \frac{\pi}{2} \int_0^\infty \frac{1}{(y_2+1)^3} dy_2$$

4. En déduire que $k = 4\sigma^2/\pi$.

On considère à présent le vecteur aléatoire (X_1, X_2) de densité $f(x_1, x_2)$.

5. Montrer que

$$\int\int \frac{x_2}{(x_1^2 + (x_2 + \sigma)^2)^2} dx_1 dx_2 = \sigma^{-1} \int\int \frac{y_2}{(y_1^2 + (y_2+1)^2)^2} dy_1 dy_2$$

6. Démontrer que

$$\int\int \frac{y_2}{(y_1^2 + (y_2+1)^2)^2} \mathbb{I}_{y_2>0} \, dy_1 dy_2 = \frac{\pi}{2} \int_0^\infty \frac{y_2}{(y_2+1)^3} dy_2 = \frac{\pi}{4}$$

7. En déduire que la moyenne du vecteur (X_1, X_2) est $(0, \sigma)$.

8. Que dire de la matrice de variance-covariance du vecteur (X_1, X_2) ?

9. X_1 et X_2 sont ils indépendants ? corrélés ?

Exercice 2

On considère un vecteur (X_1, X_2) de loi conditionnelle

$$X_1|X_2 = x_2 \sim \mathcal{N}(\mu_1 + \alpha(x_2 - \mu_2), \beta)$$

et de loi marginale sur X_2 gaussienne $\mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$.

1. On rappelle que la loi marginale de X_1 est gaussienne. Donner les paramètres de cette loi marginale de X_1.

2. Montrer que, dans ce cas, la loi jointe de (X_1, X_2) est normale. (On en précisera les paramètres.)

On suppose à présent que **seules les deux lois conditionnelles**

$$\begin{array}{lcl} X_1|X_2 = x_2 & \sim & \mathcal{N}(\mu_1 + \alpha[x_2 - \mu_2], \beta), \\ X_2|X_1 = x_1 & \sim & \mathcal{N}(\mu_2 + \delta[x_1 - \mu_1], \gamma), \end{array} \tag{1}$$

sont connues, avec $\alpha\delta \neq 1$.

3. Montrer que μ_1 et μ_2 sont les moyennes respectives de X_1 et X_2. (*Indication :* Utiliser l'identité $\mathbb{E}[X_1] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X_1|X_2]]$.)

4. Montrer que, en général, le rapport des densités conditionnelles

$$\frac{f(x_1|x_2)}{f(x_2|x_1)}$$

doit factoriser comme le produit de la densité de x_1 et d'une fonction de x_2. (*Indication :* Il s'agit en fait du théorème de Bayes.)

5. En déduire que la condition sur $(\alpha, \beta, \delta, \gamma)$ pour que les deux lois de (1) soient les deux lois condionnelles d'une même loi jointe est

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\delta}{\gamma}, \quad \frac{1}{\beta} \geq \frac{\delta^2}{\gamma}, \quad \frac{1}{\gamma} \geq \frac{\alpha^2}{\beta},$$

(On remarquera que la troisième condition est redondante.)

6. Montrer que, sous cette condition, les deux lois conditionnelles correspondent à une loi jointe normale bidimensionnelle $\mathcal{N}_2(\mu, \Sigma)$, dont on précisera les paramètres.