U. Dauphine/MD2/C. Robert 2002/2003

Statistique

Partiel du 18 mars 2003

Sans document (durée deux heures).
Calculatrice non programmable autorisée. Exercices indépendants.

Questionnaire à choix multiples (6 points)

(Une seule réponse valable par question à cocher sur cette feuille;
un ou deux point(s) par réponse positive, 0 pour une question sans réponse
et moins un point par réponse négative)

1. [1] Si X et Y sont indépendants, et de moyennes nulles, $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[Y] = 0$, $\mathrm{var}(XY)$ vaut

   ○ $(\mathrm{var}(X) + \mathrm{var}(Y))^2 - \mathrm{var}(X+Y)$ ○ $\mathrm{var}(X+Y) - \mathrm{var}(X)\mathrm{var}(Y)$
   ○ $\mathrm{var}(X)\mathbb{E}[Y^2] + \mathrm{var}(Y)\mathbb{E}[X^2]$ ○ $\mathrm{var}(X)\mathrm{var}(Y)$

2. [2] Soit $f(x,y) = e^{-y}\,\mathbb{I}_{0<x<y<\infty}$ et $A = \{x+y < 1\}$. Alors $\int_A f(x,y)dxdy$ vaut

   ○ $1 - e^{-1}$ ○ $1 - 2\,e^{-1/2} + e^{-1}$ ○ $2\,e^{-1/2} - e^{-1}$ ○ e^{-1}

3. [1] Si X et Y sont deux variables aléatoires non indépendantes, on a la relation

   ○ $\mathrm{var}(X|Y) \le \mathrm{var}(X)$ ○ $\mathrm{var}(X|Y) \ge \mathrm{var}(X)$
   ○ $\mathrm{var}(X|Y) = \mathrm{var}(X)$ ○ aucune de ces relations

4. [1] Si X et Y sont des variables aléatoires telles que $\mathrm{var}(X) = \mathrm{var}(Y) = 7\mathrm{cov}(X,Y) = 1$, $\mathrm{cov}(2X - 5Y, 5X + 2Y)$ vaut

   ○ 0 ○ 20 ○ $-21/7$ ○ $14/7$ ○ $28/7$

5. [1] Si $X_1, \dots, X_n$ sont des variables aléatoires iid de même fonction de répartition F, la fonction de répartition de $\max(X_1, \dots, X_n)$ est

   ○ $1 - (1-F)^n$ ○ F^n ○ $nF^{n-1}F'$ ○ $n\,\{1-F\}^{n-1}\,F'$

Exercice 1 (8 points)

Soit la densité de probabilité sur $\mathbb{R}_+^2$ associée à la fonction

$$f(x_1, x_2) = \exp\left\{-x_1 - x_2 - \lambda\, e^{-x_1} x_2\right\}$$

1. Montrer que $f(x_1, x_2)$ n'est intégrable que si $\lambda > -1$.

2. Montrer que, dans ce cas, la constante (multiplicative) κ de normalisation qui manque à f pour être une densité est

$$\frac{\lambda}{\log(1+\lambda)}$$

   si $\lambda \neq 0$ et 1 si $\lambda = 0$. On montrera en particulier que cette constante est toujours positive pour $\lambda > -1$. (*Indice:* On pourra utiliser le changement de variable $z_1 = \exp -x_1$ si nécessaire.)

On considère à présent le vecteur aléatoire (X_1, X_2) de densité $\kappa\, f(x_1, x_2)$.

3. Montrer que la loi conditionnelle de X_2 sachant $X_1 = x_1$ est une loi exponentielle

$$\mathcal{E}xp\left(1 + \lambda\, e^{-x_1}\right) .$$

   En déduire l'espérance conditionnelle $\mathbb{E}[X_2|X_1]$ et la variance conditionnelle $\mathrm{var}(X_2|X_1)$.

4. Déduire de la question précédente que

$$\mathbb{E}[X_2] = \kappa/(1+\lambda)\,,$$

   en reliant $\mathbb{E}[X_2|X_1]$ et $\mathbb{E}[X_2]$.

Exercice 2 (10 points)

On considère un vecteur aléatoire (X_1, X_2) défini sur le domaine

$$\mathcal{A} = \{(x_1, x_2); 0 \le x_1 \le 1,\ 0 \le x_2 \le 1 - x_1\} \cup \{(x_1, x_2); 1 \le x_1 \le 2,\ 0 \le x_2 \le x_1 - 1\}$$

Dans une première partie, on considère que (X_1, X_2) est de loi uniforme sur $\mathcal{A}$.

1. Représenter graphiquement ce domaine et définir les valeurs minimales et maximales de X_1 et de X_2.
2. Trouver la surface de $\mathcal{A}$ et en déduire la densité du vecteur (X_1, X_2).
3. Montrer que X_1 et X_2 ne sont pas corrélés : $\operatorname{cov}(X_1, X_2) = 0$.
4. Donner la variance de X_1 sachant $X_2 = x_2$ et en déduire que X_1 et X_2 ne sont pas indépendants.

On ne suppose plus que (X_1, X_2) est de loi uniforme sur $\mathcal{A}$.

On introduit à présent deux paramètres $0 < \alpha \le 1$ et $0 < \beta \le 1$, pour définir une *famille de lois* de probabilité sur $\mathcal{A}$.

5. Si
$$Z_1 = \begin{cases} X_1^\alpha & \text{si } X_1 \le 1 \\ 2 - (2 - X_1)^\alpha & \text{si } X_1 \ge 1 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad Z_2 = X_2^\beta,$$
et si (Z_1, Z_2) suit une loi uniforme sur $\mathcal{A}$, donner la densité de (X_1, X_2). Montrer en particulier que (X_1, X_2) appartient toujours à $\mathcal{A}$ avec probabilité 1.